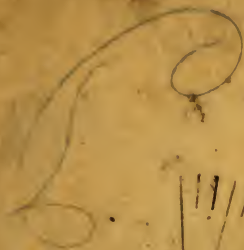
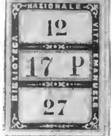





NAZIONALE
12
17 P
27
BIBLIOTECA
VITT. EMANUELE


NAZIONALE
55
5 C
17
BIBLIOTECA
VITT. EMANUELE
ROMA

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ

PAULINI A S. JOSEPHO
LUCENSIS
Cler. Reg. Schol. Piar. & in Archigymn. Romano Eloquentiæ Professoris

CUM

PRAXEΩN CHRONOLOGICARUM

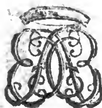
APPENDICE.

Editio Prima Neapolitana Romana 1749.
Accuratior & emendatior.

Ad Arbitrium
Definitorii Provincialis
Carmelit: Discalceatorum
Provinciae Romanae



NEAPOLI, MDCCLV.
Ex Typographia BENEDICTI GESSARI.
SUPERIORUM PERMISSU, ET PRIVILEGIO.



ADM. REV. PATRI

F. ALBERTO CAPOBIANCO

ORDINIS PRÆDICATORUM

Sac. Theologiæ Magistro, & Eminentiss. Cardinalis SERSALII *Archiepiscopi Neapolitani Theologo.*





Um diu, multumque sit, quod mecum ipse meditabar, quî tandem studium erga Te meum publico aliquo argumento testari possem, quî votis satisfacerem; commoda sese mihi dedit occasio Institutiones hasce Arithmeticas publici juris facere paranti. Et quidem uno, eodemque tempore posse mihi videor, & Tibi pluribus nominibus obligatam fidem liberare, & opellæ huic pretium, & decus ex tuo in fronte ejusdem inscripto nomine arcessere. Quam sane optionem ab optimis rerum æstimatoribus, modo eosdem, qualis, quantusve Tu sis in re Philosophica non lateat, probatum iri meus mihi animus auguratur. Cuinam enim commodius poterat hujusmodi argumenti tractatio nuncupari, quam Tibi, qui improbo, ut ita dicam, labore quicquid est sive veterum, sive recentium Philosophorum nocturna, diurnaque

versasti manu; quique eam Tibi in hisce studiis non mediocrem laudem adeptus es, ut longe, lateque extra angustos Claustrorum [ubi inter primarios tui Ordinis Sacræ Theologiæ Magistros non imum subsellium obtines] fines, ut solet regius amnis, Tui nominis fama erumpente, Te certatim accirent universi, ut apud se philosophantem, ut ita dicam, audirent. Testis Bituntinæ Ecclesiæ Præsul ille vigilantissimus D. Joannes Barba, qui Tibi sui Seminarj alumnos severioribus Philosophiæ disciplinis concredidit informandos. Testis locupletissimus & Archiepiscopus noster Cardinalis Sersalius acerrimi judicj Vir, qui Tua unius opera utens in Brundusino & Tarentino Seminario Triptolemi instar Philosophiam spargere studuit, & promovere; quique ad regendum hujusce Metropolitanæ Ecclesiæ clavum admotus haud sivit Te a se divelli. Hic facile de Te cætera persequi supersedeo, ne modestiam Tuam diutius fatigem; interim hoc qualecumque est ab animo certe Tibi deditissimo profectum officium, ut æqui bonique accipias, rogo.

Humillimus, & Addictiss. Servus
Benedictus Gessari.

AD LECTOREM.



Auci sunt, qui de Arithmetica recte judicent. Ea plerisque vilescit, quod negotiatorum, aut eorum, qui accepti expensique tabulas conficiunt, artem esse putent. At longe aliter de illa viri sapientes judicarunt. Plato quidem in Epinomide affirmat, sine Arithmetica neque ullam scientiam, neque ipsam hominum societatem posse consistere. Aristoteles autem existimabat, tam proprium esse hominis numerare, quam ratiocinari. Quid vero D. Augustinus, qui frequentissime suis in libris, præsertim vero de Doctrina Christiana, præclare de Arithmetica loquitur, multisque exemplis ostendit, ob numerorum inscitiam, plurima in sacris literis ignorari? In eadem prorsus sententia fuerunt D. Hieronymus, ut ex lib. 2. contra Jovinianum, aliisque ex locis palam est; tum D. Gregorius Nazianzenus, qui Divum Basilium præceptorem suum summis laudibus celebrat, quod is numerorum scientia ad sacræ Scripturæ intelligentiam, aliasque disciplinas sibi viam munivisset. Illud certe negari non potest, ab iis, qui Arithmeticæ studia contemnunt, Geometriæ quoque, ac veræ Physicæ studia, hoc est disciplinarum omnium succum & sanguinem, contemni omnino oportere: cum fieri non possit, ut hæc, quæ mirabili quodam ordine ac numerorum proportio-



ne inter se cohærent, sine scientia numerorum intelligantur. Quis enim sine calculis comprehendat motus quantitatem ac leges, quadrata temporum, triplicatas corporum similium rationes, resistendi vires, sonorum velocitates, liquidorum æquilibria, ac sexcenta alia, quibus non intellectis, naturalem omnem scientiam eum latere necesse est? Itaque non immerito Plato in lib. 7. de Repub. Arithmeticam vocat vestibulum scientiarum, quod scilicet numerorum tractatione speculationibus difficilioribus animus assuescit, & ad reliquos scientiæ satus excipiendos mirum in modum præparatur. Imo ex ipsa numerandi vi faustum ad ceteras disciplinas progressum auguratur. *Homines*, inquit, *natura Arithmetici ad omnes doctrinas acuti videntur*. Hinc est, quod multi in omni memoria viri doctissimi in ordinandis illustrandisque Arithmeticæ elementis desudarunt, quod eorum utilitatem summamque necessitatem probe nossent. Ex præclaris eorum inventis ego triginta & amplius ab hinc annis ea decerpsi in usum studiosæ Juventutis Collegii Nazareni, quæ magis ad Juvenum ingenium apta, & ad Matheseos studia necessaria esse judicavi. Semper enim illis viginti & uno annis, quibus nobiles ejusdem Collegii adolescentes in Mathematicis disciplinis institui, Arithmeticæ studium præmisi, cujus ope tum II., tum V. & VI. Elementorum Euclidis propositiones facile ab illis percipi experientia comperi, contra vero Arithmetica destitutos in ipsis diu multoque labore versari. Cum autem decursu temporis in ea scripta per manus tradita multa menda, ut fieri solet, irrepsis-

repsissent, multoque labore ac tempore in illis transcribendis opus esset, res non inutilis visa est, illa typis emittere; eaque occasione adjecta est doctrina de natura atque usu Logarithmorum; tum etiam nonnulla alia, quæ ad quæstiones aliquot Arithmeticæ practicæ pertinent, quæ sane in vita civili haud semel occurrunt. Ad praxes autem Arithmeticas, quæ præcepti brevitate, & exemplorum copia satis claræ esse videntur, accedunt quoque demonstrationes, quales in hujus scientiæ tyrones conveniunt, quibus nimirum Euclides adhuc ignotus: cujus nihilominus unam, vel alteram propositionem citare, aut supponere, opportunum visum est. Profecto meras praxes afferre, rem valde tritam & vulgarem putavi: demonstrationes autem adhibere ex Euclidis elementis VII., VIII., & IX., vel etiam ab Analyseos speciosæ penu depromptas, quod alii fecerunt, juventuti nostræ rem immaturam. An vero in medio constiterim, sapientum esto judicium.



JO-

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE

Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Schol. Piar.

PRÆPOSITUS GENERALIS.

CUM librum, cui titulus *Institutiones Arithmeticæ &c.* a P. Paulino a S. Joseph Assistente Generali Scholarum Piarum duo ex nostris, quibus commissum fuit, recognoverint, atque approbaverint; ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus nostris Scholarum Piarum apud Sanctum Pantaleonem, die 29. Aprilis an. 1743.

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE
PRÆP. GENERALIS.

Laurentius a S. Hyacintho Secret.

IN-

INDEX

CAPITUM, ET PROPOSITIONUM

Definitiones. Pag. [illegible]

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

Prop.I. *Dati numeri valorem exprimere.* p. 3
Prop.II. *De additione Integrorum.* p. 6
Prop.III. *Additionem examinare.* p. 9
Prop.IV. *De subtractione Integrorum.* p. 11
Prop.V. *De multiplicatione Integrorum.* p. 14
Prop.VI. *De divisione Integrorum.* p. 21
Prop.VII. *De divisione Integrorum per numeros divisoris multiplices.* p. 30

CAPUT II.

De Calculo Denominatorum.

Prop.I. *De additione numerorum denominatorum.* p. 34
Prop.II. *De subtractione numerorum denominatorum.* p. 38
Prop.III. *De multiplicatione numerorum denominatorum.* p. 40
Prop.IV. *De divisione numerorum denominatorum.* p. 41

CAPUT III.

De Calculo Fractorum.

Definitiones. p. 43
Axiomata. p. 45
Prop. I. *Datis duobus numeris, maximam eorum communem mensuram invenire.* p. 46
Prop. II. *Fractiones ad minimos terminos reducere.* p. 48
Prop. III. *Fractiones ad idem nomen reducere.* p. 49
Prop. IV. *Fractiones ad aliam dati nominis, & ejusdem valoris revocare.* p. 51
Prop. V. *Fractiones ad integra revocare.* p. 53
Prop. VI. *Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.* p. 54
Prop. VII. *Fractionem fractionis ad simplicem fractionem reducere.* p. 55
Prop. VIII. *Fractiones addere.* p. 56
Prop. IX. *Fractiones subtrahere.* p. 57
Prop. X. *Fractiones multiplicare.* p. 57
Prop. XI. *Fractiones dividere.* p. 59

CAPUT IV.

De fractionibus Decimalibus.

Definitiones. p. 62
Prop. I. *Decimales addere, & subtrahere.* p. 65
Prop. II. *Decimales multiplicare.* p. 67
Prop. III. *Decimales dividere.* p. 68
Prop. IV. *Integrum, vel fractum in partes decimales reducere.* p. 79

Prop.V. *Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.* p. 71

CAPUT V.

De extractione Radicum.

Definitio. p. 74

Prop.I. *Ex dato numero radicem quadratam, seu secundam extrahere.* p. 75

Prop.II. *Radicem quadratam per approximationem inquirere.* p. 80

Prop.III. *Ex dato numero radicem cubicam extrahere.* p. 82

Prop.IV. *Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.* p. 86

Prop.V. *Quæstiones aliquot resolvuntur per radicis quadratæ, vel cubicæ extractionem.* p. 88

CAPUT VI.

De Regulis Arithmeticis.

Definitiones. p. 91

Lemmata. p. 92

Prop.I. *De regula Proportionum.* p. 93

Prop.II. *De regula Proportionum composita.* p. 96

Prop.III. *De regula Proportionum inversa.* p. 98

Prop.IV. *Explicantur nonnulla pro regulis Proportionum compendia.* p. 101

Prop.V. *De regula Societatis.* p. 103

Prop.VI. *De regula Alligationis.* p. 106

Prop.VII. *De regula simplicis Positionis, seu falsi.* p.110
Prop.VIII. *De regula duplicis Positionis.* p.112
Prop.IX. *Artificis furtum in corona Hieronis regis detegere.* p.118
Prop.X. *Datis duobus numeris, tertium proportionalem invenire.* p.120
Prop.XI. *Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.* p.122
Prop.XII. *Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire.* p.122
Prop.XIII. *Quæstiones aliquot practicæ expediuntur.* p.123

CAPUT VII.

De Progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

Lemmata. p.129
Prop.I. *Datis minimo ac maximo progressionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire summam.* p.131
Prop.II. *Datis terminis maximo & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.* p.132
Prop.III. *Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.* p.133
Prop.IV. *Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.* p.134
Prop.V. *De numeris Polygonis.* p.135

De

De Progreſſionibus Geometricis.

Lemmata. p. 137 & 138
Prop. VI. *Datis minimo & maximo progreſſionis Geometricæ terminis, ac denominatore, ſummam terminorum invenire.* p. 139
Prop. VII. *Datis aliquot progreſſionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.* p. 142
Prop. VIII. *Afferuntur nonnullæ Progreſſionis Geometricæ quæſtiones.* p. 143
Prop. IX. *Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.* p. 145
Prop. X. *Ex dato rerum numero permutationes omnes poſſibiles invenire.* p. 147
Prop. XI. *Proponuntur aliqua permutationum problemata.* p. 149
Prop. XII. *Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros* Harmonice *proportionales invenire.* p. 150
Prop. XIII. *Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.* p. 151
Prop. XIV. *Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.* p. 151

CAPUT VIII.

De Logarithmis, eorumque natura, atque uſu.

Lemmata. p. 154

Prop. I. *De natura Log-morum, eorumque inventione.* p. 154

Prop. II. *Si Logarithmus unitatis sit o, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.* p. 156

Prop. III. *Si Log-mus unitatis est* o, *differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mo quoti eorundem numerorum.* p. 158

Prop. IV. *Numeri cujuscunque Log-mum invenire.* p. 158

Prop. V. *Multiplicare duos numeros, qui minores sint quam* 10000. p. 162

Prop. VI. *Numerum integrum minorem, quam* 10000 *per alium dividere.* p. 163

Prop. VII. *Datis tribus numeris, quartum proportionalem invenire.* p. 164

Prop. VIII. *Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, sed numerum* 10, 000, 000 *non excedentibus.* p. 164

Prop. IX. *Datæ fractionis Log-mum invenire.* p. 167

Prop. X. *Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non existit, invenire numerum ei respondentem.* p. 169

Prop. XI. *Dato Log-mo defectivo, numerum ei respondentem invenire.* p. 171

Prop. XII. *Dato Log-mo excedente Log-mum* 4.0000000, *numerum ei congruum invenire.* p. 172

Prop. XIII. *Dati cujuscunque Sinus Log-mum invenire.* p. 173

Prop.

Prop. XIV. *Invenire Logarithmum Tangentium, & Secantium dati arcus.* p. 175
Probl. I. *Dati numeri quadratum, vel cubum per Logarithmos invenire.* p. 179
Probl. II. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios proportionales.* p. 180
Probl. III. *Quæstiones aliquot Arithmeticæ per Logarithmos expediuntur.* p. 182
Probl. IV. *Data tormenti bellici elevatione, distantiam ictus invenire, & e converso.* p. 187
Probl. V. *Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire.* p. 189
Probl. VI. *In linea meridiana Zodiaci signa describere.* p. 190

APPENDIX

Praxeωn Chronologicarum.

Definitiones. p. 193
Prax. I. *An datus annus sit Bissextilis, vel quotus sit a Bissextili, invenire.* p. 196
Prax. II. *Cyclum Solarem anni dati invenire.* p. 197
Prax. III. *Aureum numerum dati anni invenire.* p. 197
Prax. IV. *In quam hebdomadæ feriam incidat primus anni dati dies, invenire.* p. 198
Prax. V. *Literam Dominicalem dati anni invenire.* p. 199
Prax. VI. *Dati anni Epactam invenire.* p. 200
Prax. VII. *Mense ac die datis, ætatem Lunæ invenire.* p. 200

Prax. VIII. *Datis mense & anni Epacta, Novilunii diem invenire.* p. 201
Prax. IX. *Dato Æræ Christianæ anno, Indictionem invenire.* p. 202
Prax. X. *Dato Æræ Christianæ anno, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.* p. 202
Prax. XI. *Dato anno ante Christi æram, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.* p. 203
Prax. XII. *Datis Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis, invenire annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.* p. 204
Prax. XIII. *Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.* p. 205
Prax. XIV. *Dato anno Olympiaco, quotus ille in Periodo Juliana sit, invenire.* p. 207
Prax. XV. *Dato anno Periodi Julianæ, annum U.C. ei congruentem invenire.* p. 208
Prax. XVI. *Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympiadum, & æræ Christianæ annos ei congruentes invenire.* p. 209
Prax. XVII. *Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, seu neomeniam Thoth, invenire.* p. 211
Prax. XVIII. *Dato quolibet Per. Jul. anno, quotus ille in Æra Nabonassari sit, invenire.* p. 213
Prax. XIX. *Nabonassari annos in Per. Jul. annos convertere.* p. 215
Prax. XX. *In anno Nabonassari feriam invenire.* p. 216

IN-

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

DEFINITIONES.

I. ARITHMETICA est scientia numerorum, cujus partes sunt quatuor: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*.

II. *Unitas* est denominatio, per quam aliqua res dicitur una.

III. *Numerus* est unitatum multitudo; proinde unitas non est numerus, sed numeri principium, sicuti punctum est principium lineæ.

IV. *Numeri simplices* sunt unitates infra decadem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. His additur cyphra 0, quæ per se nihil significat, sed numeris addita valorem auget decuplum, ut 10, 20, 30 &c.

V. *Numeri compositi* sunt numeri majores denario, incluso ipso denario, scilicet 10, 11, 12, 13, 14 &c.

VI. *Numerus numeri multiplex* dicitur, cum minor metitur majorem, hoc est cum minor aliquoties sumptus majori æqualis fit; seu cum major minorem aliquoties præcise continet. Sic 12 dicitur multiplex numeri 2, quia 2 sexies sum-

ptus æqualis fit ipsi 12; seu quia 12 sexies præcise continet 2.

VII. *Pars aliquota* numeri est, quæ numerum metitur, pars *aliquanta*, quæ non metitur. Sic 2, 3, 4 dicuntur pars aliquota numeri 12; at vero 5 pars aliquanta ipsius, quia aliquoties sumpta vel ipsum excedit, vel ab eo deficit.

VIII. *Numeri inter se primi sunt*, quos nulla communis mensura, præter unitatem, metitur; ut 5 & 9, 7 & 12, 10 & 13, & alii infiniti.

IX. *Proportio numerorum* est habitudo, seu ratio quædam unius numeri ad alterum, secundum quod unus alterius est multiplex, vel pars, seu partes; sic 4 ad 2 dicitur habere rationem dupli; 9 ad 3 rationem tripli. Contra vero 2 ad 4 rationem partis, seu semissis, 3 ad 9 rationem tertiæ partis &c.

X. *Numeri homogenei* sunt illi, quorum unitates eandem rem significant.

XI. *Numeri heterogenei*, seu *denominati* sunt, qui variis nominibus denominantur, hoc est res diversas significant, ut dies, horas, minuta.

XII. *Numeri* alii sunt *integri*, alii *fracti*, qui nempe continent aliquot partes alterius numeri, seu unitatis, de quibus in Cap. III.

Schol. *Has notas* Arithmeticas, *antiquis prorsus incognitas, in Hispaniam Mauri deportarunt; inde in Galliam, aliasque Europæ gentes induxit seculo* X. *Gerbertus Monachus Aureliacensis, vir doctus, qui postea fuit Pontifex Silvestri II. nomine.*

CA-

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Dati numeri valorem exprimere

I. **S**It exprimendus numerus datus *A*. Dividatur in periodos, secernendo virgula ternas quascunque figuras, incipiendo a dextera; divisus erit numerus *A* in tres periodos, seu centurias. Harum quælibet continet unitates, decades, & centenas: sed prima dextrorsum continet unitates, decades, & centenas simpliciter; secunda vero continet unitates, decades, & centenas millium; tertia demum unitates, decades, & centenas millionum.

A 394, 875, 462.

Exprimitur incipiendo sinistrorsum, & progrediendo versus dexteram sic: tercenti nonaginta quatuor milliones, octingenta septuaginta quinque millia, quadringenta sexaginta duo. Similiter numerus *B* divisus, ut superius dictum est, dicit centum viginti quatuor milliones, & duo millia

B 124, 002, 000.

Demum numerus *C* exprimit milliones 100.

C 100, 000, 000.

II. Pro numeris prolixioribus exprimendis ita procedes. 1. Datus numerus eodem modo per virgulas distribuatur in membra, ut superius factum est. 2. Super notam primam dextrorsum ponatur una cyphra o, intermissisque quinque figuris, supra notam septimo loco positam ponatur unitas 1. Item post quinque iterum notas scribatur 2, atque ita deinceps, relictis semper quinque notis, scribatur 3, 4, 5 &c. Quodlibet membrum continet sex notas, (præter primum ad sinistram, quod aliquando continere potest 2, 3, 4, aut 5 notas). Exprimendæ sunt igitur simul sex illæ notæ; prolataque integra periodo, toties repetenda est vox hæc *millio*, quot sunt unitates, quæ continentur supra primam notam talis periodi. Virgulæ autem appositæ *millia* significant; ut exemplis sequentibus *D*, & *E* facile intelligitur.

2 1 0
D 52,329,189,602,800

Quinquaginta duo milliones millionum, tercentum viginti novem millia, centum octoginta novem milliones, sexcenta duo millia, octingenta.

3 2 1 0
E 45,928,634,426,350,872,385,173

Quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo milliones millionum millionum, sexcenta triginta quatuor millia, quadringenti viginti sex milliones millionum, tercenta quinquaginta millia, octingenti septuaginta duo milliones, trecenta octogin-

ginta quinque millia ac centum ſeptuaginta tres.

Schol. I. *Si cui moleſtum ſit iterare toties vocem illam* millionum, *utatur hoc compendio: Ubi pronuncianda eſt vox millionum bis, dicat* bilionum: *ubi ter, dicat* trilionum: *ubi quater*, quadrilionum *&c. adeoque ſuperius exemplum efferri poteſt ſic: quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo* triliones, *ſexcenta triginta quatuor millia, quadringenti viginti ſex* biliones, *tercenta quinquaginta millia &c.*

Schol. II. *Præter valorem ſimplicem, quem ſingulæ notæ Arithmeticæ habent proprium, alium inſuper habent ratione loci, quem occupant: qui valor procedit in proportione ſubdecupla. Itaque nota primo loco, a dextris incipiendo, poſita ſignificat unitates, ſecundo loco poſita ſignificat tot decades, quot unitates habet; tertio loco tot centenas, quarto loco millia, quinto loco dena millia, ſexto loco centena millia &c. Id tyrones bene intelligant neceſſe eſt. Ecce exemplum.*

1 3 4 6 5 9 2.	duo.
9 0.	nonaginta.
5 0 0.	quingenta.
6 0 0 0.	ſex millia.
4 0 0 0 0.	quadraginta millia.
3 0 0 0 0 0.	trecenta millia.
1 0 0 0 0 0 0.	decies centena millia, ſeu millio.
1. 3 4 6 5 9 2.	

PRO-

PROPOSITIO II.

De Additione Integrorum.

I. ADditio est plurimorum numerorum in unam summam collectio. Numeri addendi vocantur *dati*; numerus, qui ex additione conflatur, dicitur *summa*, seu *aggregatum*. Additio procedit a dextra in sinistram. En praxis pro homogeneis.

1. Scribantur numeri ordinatim ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis invicem sibi respondeant.

2. Ducta linea, numeros sub eadem columna positos in unum collige; & si novem non excedant, subscribe quotquot sunt.

3. Si numerus collectus excedit novem, ita ut unam, vel plures decades contineat, subscribe id, quod remanet supra decades, & adde sequentis columnæ numeris tot unitates, quot fuerunt decades.

Sit exemplum, quæritur quot anni elapsi sint ab orbe condito usque ad annum 1742. completum. Ex Petavii computo *tom.* 2. *lib.* 13. *de Doctrina Temporum* numerantur,

	D	C	B	A
Ab Adamo ad finem diluvii anni	1	6	5	6
A fine diluvii ad Christum	2	3	2	7
A Christo ad annum 1742.	1	7	4	2
Summa	5	7	2	5

Nam

Nam primo unitates 2, 7, 6 in columna *A* faciunt 15, quæ continent decadem 1, & remanet 5. Scribo itaque 5 infra lineam, & reſervo 1 pro ſequenti columna *B*, nempe unam decadem.

Similiter decades 4, 2, 5 in columna *B* faciunt 11. addita priori unitate, ſunt 12. Scribo 2 infra lineam, & retineo unitatem, quæ centenarium dicit, addendam numeris columnæ *C*.

Centena 7, 3, 6 columnæ *C* cum præcedenti unitate faciunt 17. Scribo igitur 7, & retineo unitatem, quæ mille importat, pro ſequenti columna *D*.

Demum millia 1, 2, 1 columnæ *D* cum præcedenti 1 faciunt 5, quæ ſcribo infra lineam, & habetur ſumma quæſita 5725.

Sit aliud exemplum. Addendæ ſunt in unam ſummam plures accepti, vel expenſi ſummæ *A*,*B*,*C*.

A 104	*B* 7245	*C* 235
741	3280	7348
892	834	9532
1380	1273	780
E Sum. 3117	Sum. 12632	Sum. 17895

Peracta operatione, habetur ſumma *E* 3117; ubi patet, cyphras 0 in additione nihil addere, nam 0, 2, 1, 4, faciunt 7.

II. Præter uſitatum additionis explicatæ modum, eſt alter, in quo operatio procedit a ſiniſtra verſus dexteram, & nullus in eo numerus mente retinetur, ſed tota ſumma ſtatim infra lineam deſcribitur. Addendi ſint numeri *A*, *B*, *C*.

	F	G	H	I
A	1	9	6	6
B	7	3	4	5
C	9	2	8	9
D	17	4	8	0
E	1	1	2	
X	18	6	0	0

1. Incipiens a ſiniſtra, quæ hic millia ſignificat, dico 9 cum 7 faciunt 16, & 16 cum 1 faciunt 17, quem totum ſcribo ſub ipſa columna millium *F*.

2. Colligo centena ſecundæ columnæ *G*, quæ faciunt 14: pono 4 immediate ſub linea, ſed 1 ſub præcedenti columna *F*, nempe infra 7. Eodem modo notantur decades 18 ſub columna *H*, & unitates 20 ſub columna *I*.

3. Ducta linea, altera ſit additio ordinum *D* & *E*, & habetur ſumma quæſita *X*.

Demonſtr. Additionis ratio manifeſta eſt ex *Axiom. 9. lib.* 1. *Eucl.* nempe totum æquale eſſe omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Tot enim ſunt unitates, decades, centena, ac millia in ſumma reperta *X*, quot unitates, decades, centena, ac millia exiſtunt in ſummis ſingulis datis *A*, *B*, *C*. Nam ſi colligantur unitates ſub columna prima *I*, efficiunt 20, hoc eſt decades 2, proinde ponitur 0, & reſervantur 2 illæ decades ad propriam ſedem decadum *H*. Similiter decades collectæ ſub columna *H*. ſunt 18, quæ additis duabus prioribus, fa-

fa.

faciunt 20, hoc eſt centena 2, adeoque ponitur 0, & reſervantur 2 ad ſequentem ſeriem. Sub columna tertia *G* ſunt 14 centena, quibus ſi addantur 2 præcedentia, ſunt 16. Ponitur itaque 6, & reſervatur 1 mille. Demum millia columnæ quartæ *F* ſunt 17, quæ cum præcedenti 1 ſunt 18 millia. Patet igitur tot unitates, decades, centena, ac millia in ſumma *X* contineri, quot omnino continentur in numeris datis *A*, *B*, *C*. Quod totum patet ad oculum, ſcilicet

	F G H I	
	A 1 9 6 6	
	B 7 3 4 5	
	C 9 2 8 9	
Unitates	2 0	2 0
Decades	1 8 .	1 8 0
Centena	1 4 . .	1 4 0 0
Millena	1 7 . . .	1 7 0 0 0
	X 1 8 6 0 0	*X* 1 8 6 0 0

PROPOSITIO III.

Additionem examinare.

Multiplici ratione fieri poteſt examen.

1. Eandem additionem repete, ſed ordine mutato, ut ſi prius ab imo ſurſum proceſſeris, deinde a ſummo deorſum deſcendas: nam ſi utraque ſumma inventa eadem fuerit, probabile eſt, nullum errorem irrepſiſſe.

2. A numeris addendis abiicitur 9 quoties potest, nulla habita ratione ordinis, aut loci, & residuum notatur in angulo crucis. Abjectisque deinde 9 ex summa *A*, ponitur residuum in altero angulo; quæ residua si fuerint æqualia, recte operatus es, quod patet sequenti exemplo:

4824	6	
5721		6
3402		
A 13947		

Hoc examen male audit, ut fallax, nam si pro summa *A* alia longe major ponatur 19347, iisdem numeris ordine mutato constans, aut si eidem summæ A addas quotcunque volueris cyphras o, semper remanet, abjectis novenariis, idem residuum 6. Ceterum ob summam ejus facilitatem non est rejiciendum.

3. Fit abjiciendo omnes numeros septenarios e qualibet summa particulari *A*, *B*, *C*, & ponendo seorsim residuum ut in *E*. Abjectisque deinde 7 ex utraque summa *M*, & *N*, si residua in utroque angulo crucis posita æqualia sint, res bene processit. Est autem discrimen inter hoc, & superius examen. Numerus 9 abjicitur per additionem numeri ad numerum, ex. gr. ut abjiciam 9 ex 134, sufficit addere simul 4 cum 3 & 1, & habetur statim novenarii residuum 8. At si abjicere velis 7 ex eodem 134, procedendum est per decades, abjiciendo primum 7 ex 13, unde remanet 6, deinde ex 64, & residuum est 1. *A*

A 3 4 5 6	*E* 5		
B 7 2 0 1	5	3	
C 3 4 5 8	0	—	—
M 1 4 1 1 5	*N* 10		3

Hoc quoque examen aliquando fallit, sed raro. Ratio autem utriusque examinis desumitur ex *Axiom.* 3. *lib.* 1. *Eucl.* Si ab æqualibus demas æqualia, residua sunt æqualia.

PROPOSITIO IV.

De Subtractione Integrorum.

SUbtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem. En praxis.

1. Collocetur numerus minor sub majori, a quo debet subtrahi, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis respondeant, ut de additione dictum est *Prop.* 2.

2. Ducta linea, & dextrorsum incipiendo, auferantur unitates ab unitatibus, decades ex decadibus &c. & id, quod remanet, scribatur infra lineam.

3. Si quis numerus inferior subduci non potest a superiori, quia illo major est, intelligatur addita numero ipsi superiori decas, factaque subtractione, ponatur residuum infra lineam: sed deinde numerus superior, qui sequitur, unitate mi-

nuitur, vel (idem enim eſt) ſubſequens numerus inferior augetur unitate.

4. Demum ſi numerus inferior ſit ſuperiori numero æqualis, ponitur infra lineam 0; vel linea –, ſi id contingat in fine operationis.

Sit exemplum. Debet quis alteri aureorum ſummam *A*, non habet niſi aureorum ſummam *B* ſolvendam, quærit quantum de ære alieno ſuperſit.

A	1	9	2	5
B	1	3	8	2
C	–	5	4	3

Primo aufer 2 ex 5, remanent 3, quæ ſcribe infra lineam. Deinde 8 ſubduci non poteſt ex 2, intellige decadem additam ipſi 2, fiet 12, ex quo aufer 8, remanent 4, ſcribenda infra lineam. At ubſequens numerus ſuperior 9, minuitur unitate, vel inferior 3 unitate augetur, proinde ſubductis 4 ex 9, reſiduum eſt 5, quod ſcribe infra lineam. Demum auferendo 1 ex 1, nihil remanet, ſcribe lineam. Debebit igitur adhuc aureos 543, cum talis ſit exceſſus numeri majoris *A* ſupra minorem *B*.

Similiter ſubduci debet numerus *N* ex numero *M*, quæritur exceſſus, ſeu reſiduum X.

M	6	2	0	0	1	0	0	2	7
N		3	1	9	5	7	6	8	4
X	5	8	8	0	5	2	3	4	3

Aufer

Aufer 4 ex 7, reſiduum eſt 3. Item 8 ex 12, reſiduum eſt 4. Pariter 7 ex 10, reſiduum eſt 3. Similiter 8 ex 10, reſiduum eſt 2, tum 6 ex 11, reſiduum eſt 5, & 10 ex 10, reſiduum eſt 0 &c.

Examen ſubtractionis generatim fit addendo reſiduum *X* numero minori ſubtracto *N*. Nam ſi erratum non ſit, reſtituitur major numerus *M*, ut patet.

Examen fieri quoque poteſt per abjectionem novenarii. Nam abjecto novenario ex *A*, quantum abjici poteſt, reſiduum eſt 8. Deinde abjecto novenario ex numeris *B* & *C*, æqualibus ipſi *A*, reſiduum pariter eſt 8.

A	6434	8	
B	521		
C	5913		8

Demonſtr. Subtractionis per ſe patet Nam ex *Defin.* ſubtractio eſt inventio exceſſus, quo numerus major ſuperat minorem, proinde exceſſus una cum minori numero adæquat majorem; adeoque tot unitates, decades, & centena debent eſſe in *B*, & *C* ſimul, quot ſunt in *A*. Sed ſubducendo 1 ex 4, ponitur reſiduum 3. Sunt ergo tot unitates in *B*, & *C* ſimul, quot ſunt in *A*, nempe 4. Similiter ſubducendo decades 2 ex decadibus 3, ponitur 1 in reſiduo. Igitur decades *B* & *C* æquales ſunt decadibus in *A* contentis, nempe 3, & ſic deinceps. Eſt ergo æqualitas inter *A*, & *B* una cum *C*. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO V.

De Multiplicatione Integrorum.

MUltiplicatio est ductus unius numeri in alium, ex quo alter toties augetur, quoties in altero unitas continetur.

Vel *Multiplicatio* numeri per numerum est inventio numeri, qui toties contineat numerum multiplicatum, vel multiplicantem, quot alter continet unitates. Ut numerus *A* 12 multiplicatus per *B* 3 producit numerum *C* 36, qui ter continet *A*, sicuti *B* ter continet unitatem. Hinc patet multiplicationem esse compendiosam additionem; idem enim est multiplicare *A* per *B*, ac toties addere ipsum *A*, quot sunt in *B* unitates.

Numeri *A* & *B* dicuntur *multiplicatores*, seu *factores*, numerum *C productum*, seu *factum*. Vulgo tamen qui minor est, & inferius scribitur, dicitur multiplicator, seu multiplicans, major autem multiplicandus appellatur. En praxis.

1. Si multiplicator unica figura constet (ut in primo sequenti exemplo) illa ducatur singillatim in omnes multiplicandi figuras, initio facto a dextra versus sinistram; & quot productum continet decades, tot reserventur unitates sequenti producto adjiciendæ, & scribatur infra lineam id, quod remanet.

2. Si multiplicator pluribus constet figuris; tunc singulæ seorsim ducantur in singulas numeri multiplicandi figuras, sed producta ita infra lineam scri-

ſcribantur, ut productum ſecundæ ponantur directe ſub ipſa ſecunda figura, productum tertiæ figuræ ſub tertia, & ſic deinceps, cum hæc producta important decades, centena &c.

3. Ducta linea, ſingula producta particularia in unam ſummam colligantur, ut habeantur integrum productum quæſitum.

Sit exemplum 1. Vendendi ſunt agni *A* juliis 5 in ſingula capita, quæritur pretium *C*.

A	1 2 7 6.	*multiplicandus.*
	5.	*multiplicans.*
C	6 3 8 0.	*productum.*

Primo 6 quinquies ſumptus facit 30, pono 0, & ſequenti producto addo tres unitates ob tres decades producti primi. Deinde 7 quinquies ſumptus facit 35: addo 3, fiunt 38, ſcribo infra lineam 8, & reſervo 3. Tum 2 quinquies ſumptus facit 10, addo 3 fiunt 13, ſcribo infra lineam 3, & ſervo 1. Demum 1 quinquies ſumptus facit 5, addo 1 precedentem, & ſcribo 6.

Exemplum 2. Quæritur quot horas annus unus contineat, qui dies 365 continere ſupponitur.

Dies	3 6 5
Horæ	2 4
	1 4 6 0
	7 3 0
Horæ	8 7 6 0

Exem-

Exemplum 3. Aerarii præfectus exigit annuatim ab oppidis 824 aureos 102, quæritur aureorum summa.

	Opp.	8 2 4
	Aur.	1 0 2
		1 6 4 8
		8 2 4 0
Aur.		8 4 0 4 8

Coroll. Hinc patet, quod si in multiplicatore occurrit cyphra 0, ponitur in producto cyphra (vel plures, si sint) deinde statim continuatur multiplicatio ceterorum numerorum.

Schol. I. *Cyphræ initiales ante operationem resecantur; operatione autem peracta, producto adduntur quotquot sunt. Pariter si multiplicandus sit numerus per* 10, *vel* 100, *vel* 1000 *&c. satis est addere multiplicando ad dexteram tot cyphras, quot continentur in multiplicatore, sine ulla alia operatione, quia unitas non multiplicat. Utrumque patet exemplis* A & B.

A 1 3 6 | 0		*B* 1 5 7 2 4
2 | 0 0		1 0 0 0
2 7 2, 0 0 0		1 5 7 2 4, 0 0 0

Schol. II. *Multiplicatio fit etiam per factores numeri multiplicantis, vel multiplicandi. Sic idem est multiplicare* 30 *per* 24, *ac* 30 *per* 4 & 6 *hoc est* 30 *per* 4, *ejusque productum per* 6.

Schol.

Schol. III. *Multiplicatio fit etiam per tabulam, quæ ab ejus auctore Pythagora vocatur* Pythagorica. *En usus; si scire velis productum ex. gr. ex 3. in 8, quære 3 in columna* AB, *&* 8 *in fronte* AC, *invenies in communi concursu productum* 24. *Sic de ceteris. Ratio est, quia columna prima incipit ab unitate, & descendendo crescit usque ad 9. Secunda incipit a binario, tertia a ternario &c. semper usque ad 9 progredientes. Prima crescit sola unitate, secunda numero binario, tertia ternario &c. In exemplo allato numerus* 8, *qui crescit numero octonario, habet in tertia sede numerum* 8 *ter sumptum, scilicet* 24. *Idem numerus* 8 *habet in quinta sede* 40, *hoc est* 8 *quinquies sumptum, & sic de ceteris.*

A *Tabula Pythagorica.* C

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

B D

Schol. IV. *Tabulam Pythagoricam in plures tabellas oblongas mobiles dissecuit Jo: Neperus Scotus, quibus mirabili artificio multiplicationis, & divisionis compendium exhibetur. En constructio. Fiant ex ære, vel ligno, aliave materia solida decem vel undecim tabellæ, seu parallelepipeda, ut sunt* A B, C D*; quorum longitudo dividatur in 9 quadrata æqualia; iisque per diametrum divisis (excepto uno* X Z, *cui inscribuntur simpliciter numeri naturales* 1, 2, 3, 4 *&c. usque ad novem inclusive, qui exponentes vocantur) habentur totidem triangula æqualia, quibus inscribendi sunt numeri ex singulis columnis ejusdem Tabulæ Pythagoricæ; ita tamen ut in uno parallelepipedo quadrata superiora habeant numeros* 1, 2, 3, 4. *In secundo numeros* 2, 3, 4, 5. *In tertio* 3, 4, 5, 6, *& sic successive. Sic enim poterit idem numerus, si opus sit, iterato haberi, ex. gr.* 555. *In uno, vel altero parallelepipedo ponuntur ubique cyphræ. Ecce autem usus.*

Esto multiplicandus 578 *per* 69. *Jungantur simul tria parallelepipeda, quæ in vertice referant numerum datum* 578 *(ut in figura) præfixo ad lævam parallelepipedo* X Z *exponentium, ex quo habentur numeri multiplicatoris* 6 *&* 9. *Jam singula facta numeri* 9 *in* 578 *exhibentur in triangulis, & rhombis directe ad ipsum* 9 *appositis, facto initio a triangulo inferiore dextrorsum, & addendo numeros in rhombis positos, nempe* 5202. *Eodem modo habentur facta numeri* 6 *per* 578, *nempe* 3468, *quæ addita, ut superius num.* 2. *dictum est, dant productum integrum* 39882.

A	C
1	2
2	4
3	6
4	8
5	1/0
6	1/2
7	1/4
8	1/6
9	1/8
B	D

X			
1	5	7	8
2	1/0	1/4	1/6
3	1/5	2/1	2/4
4	2/0	2/8	3/2
5	2/5	3/5	4/0
6	3/0	4/2	4/8
7	3/5	4/9	5/6
8	4/0	5/6	6/4
9	4/5	6/3	7/2
Z			

Multiplicationis examen fieri potest per abjectionem novenarii, aut septenarii. Nam 1° abjicitur 9, vel 7 ex numero multiplicando *A*, & residuum ponitur in angulo crucis *M*. 2° Rejicitur 9, vel 7 ex multiplicante *B*, cujus residuum ponitur in angulo crucis *N*. 3° Multiplicantur inter se *M* & *N*, & ex producto abjicitur 9, vel 7, residuumque

que scribitur in angulo *R*. 4° Rejectis 9, vel 7 ex producto *C*, habetur residuum, quod si æquale sit residuo priori *R*, res bene processit.

	A	3	5	0	6				
	B		1	3	2		*M* 5	3 *R*	
D		7	0	1	2		*N* 6	3 *T*	
E	1	0	5	1	8				
F	3	5	0	6			6	1	
C	4	6	2	7	9	2	6	1	

Fit etiam *examen per divisionem*. Nam si dividatur productum *C* per alterutrum factorem *A*, vel *B*, prodibit in quotiente alter factorum *A*, vel *B*. Sed prius intelligendum, quid sit divisio, de qua in sequenti *Propos.*

Demonstr. Cum multiplicatio sit compendiosa additio, ut dictum est, multiplicatio numeri *A* per notam ultimam numeri *B*, nempe per 2, est addere ipsum numerum *A* bis, unde producitur *D* 7012, in quo tot sunt unitates, decades, ac centena, quot habentur in *A* bis sumpto. Similiter multiplicatio ejusdem numeri *A* per secundam notam numeri *B*, nempe per 3, qui significat 30, est additio ipsius *A* sumpti trigesies, unde productum *E* tot continet unitates, decades, centena &c. quot continentur in *A* trigesies sumpto. Demum productum *F* habetur ex multipli-

tiplicatione numeri A per 1, hoc eſt per 100; adeoque tot unitates, decades &c. continentur in F, quot continentur in A, ſi centies ſumatur. Igitur tres numeri D, E, F, ſeu productum integrum C, tot continet unitates decades &c. quot continentur in A centum trigeſies, & bis ſumpto. Quod erat &c.

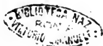
PROPOSITIO VI.

De Diviſione Integrorum.

Diviſio eſt inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus continet diviſorem. Numerus inventus dicitur *quotiens*, *quotus*, vel *exponens*; exponit enim per ſuas unitates, quoties diviſor continetur in dividendo. Itaque dividendo numerum 12 per numerum 3, invenitur quotus, ſive exponens 4, qui toties continet unitatem, quoties dividendus 12 continet diviſorem 3.

I. Sit diviſor numerus ſimplex 5, per quem dividendus eſt numerus datus 1580455. Ponatur diviſor ſiniſtrorſum ſeorſim poſt lineam, ut in M.

Diviſor M 5) 1 5 8 0 4 5 5. *dividendus*.
3 1 6 0 9 1. *quotus*.



Et

Et procedendo a finistra in dexteram, vide quoties 5 continetur in 15, nempe ter, fubfcribe 3. Deinde vide quoties idem 5 continetur in fubfequenti numero 8, continetur femel, & remanent 3. Scribe 1 fub ipfo 8, tum adde decades tres fequenti figuræ dividendi, fiunt 30, quibus divifis per 5, habetur quotus 6, quem pone fub o. Poftea 4 dividi nequit per 5, utpote minor, pone igitur o in quoto, & adde quatuor decades fubfequenti numero 5, fiunt 45, quæ dividantur per 5, erit quotus 9, quem fubfcribe. Demum dividendo 5 per 5, habetur quotus 1. Quotus igitur quæfitus eft 316091. Hic dividendi modus vulgo dicitur: *partire a colonna*.

Fieri etiam poteft hæc divifio præfidio tabulæ Pythagoricæ, de qua in *præc. Propof.* Nam numerus dividendus in media area reperitur; divifor vero in latere *AB*, & quotus in fronte *AC*. Sit dividendus numerus 40 per 5, reperto 40 in area, & divifore 5 in latere *AB*, invenitur in fronte *AC* quotus 8. Quod fi dati numeri 40 divifor fuerit 8, invenietur in fronte quotus 5; & fic de aliis.

Sin autem numerus dividendus in area tabulæ præcife non reperitur, ut fi dividendus fit 50 per 6; fumitur numerus proxime minor, cui directe refpondet divifor 6 in latere exiftens, nempe 48, & in fronte occurrit 8, qui erit quotus quæfitus.

Examen hujufce divifionis fit multiplicando quotum per diviforem. Si erratum non fit, reftituitur idem numerus, qui fuit divifus, ut patet.

II. Quod

¶ II. Quod si divisor sit numerus compositus, pluribus constans figuris, alia via procedendum. Dividendus sit numerus datus *A* per *B*.

```
B 45 )      A  1 8 6 7 3 0
               1 8 0
               -----------
C 4 1 4 9 )   — 6 7
                4 5
               -------
                2 2 3
                1 8 0
               — 4 3 0
                 4 0 5
               ---------
                — 2 5
```

1. Accipe ex dividendo *A* tot figuras sinistrorsum, quot sunt in divisore *B*. Vel accipe tot figuras ex numero dato *A*, quot per divisorem *B* dividi possint; ut in hoc exemplo 186, easque secerne puncto. Erit 186 primum divisionis membrum.

2. Vide quoties divisor *B* contineatur in 186: quod quia primo intuitu dignoscere haud facile est, vide quoties prima divisoris figura 4 contineatur in 18; patet contineri quater, & remanent 2, quæ cum sequenti figura 6 faciunt 26, in quo secunda divisoris figura 5 pariter continetur quater (nihil autem refert si pluries contineatur) totus ergo divisor 45 continetur quater in toto divisionis membro 186, proinde pone 4 in *C*.

3. Per

3. Per quotum *C* multiplica totum divisorem *B* 45, & productum 180 subscribe ipsi 186, a quo illud subtrahe *per Propos.* IV. remanent 6.

4. Ad hoc residuum 6 junge dextrorsum subsequentem dividendi figuram 7, erit 67 secundum divisionis membrum; eademque omnino operatio instituenda est, quam breviter in gratiam tyronum prosequar, scilicet

Quære quoties divisor 45 contineatur in 67, patet contineri semel, scribe ergo in *C* 1, per quem multiplica totum divisorem *B*, & productum 45 subscribe ipsi 67, factaque subtractione, habetur residuum 22.

Ad hoc residuum 22 adjunge sequentem dividendi figuram 3, fiet tertium divisionis membrum 223. Circa quod rursus eadem operatio repetenda est.

Proinde vide quoties divisor 45 contineatur in 223: seu quoties prima figura 4 contineatur in 22; patet contineri quinquies, & remanent 2, quæ una cum sequenti figura 3 faciunt 23. Sed secunda divisoris figura 5 non continetur quinquies in 23, proinde quotus ille 5 minui debet unitate (vel etiam pluribus, si opus sit) & reponitur 4 in *C*; per quem multiplicato divisore *B*, habetur productum 180, quod subscribe ipsi 223, ab eoque subtrahe, remanent 43.

Junge demum ad 43 ultimam dividendi figuram 0, erit quartum divisionis membrum 430, quocirca eadem praxis facienda est. Vide igitur quoties 4 contineatur in 43, dic contineri tantum novies (nam nullus quotus ponitur in *C*

ma-

major, quam 9) remanent 7, quæ cum cyphra faciunt 70, in quo pariter altera divisoris nota 5 continetur novies. Itaque multiplicando divisorem 45 per 9 habetur productum 405, quod subtrahendum est ab ipso 430, & residuum divisionis est 25. Quotus ergo quæsitus C est 4149, & remanent 25.

Coroll. Ex præcedenti exemplo tria sunt colligenda. 1. Si secunda, tertia, aut quarta divisoris nota toties contineri non possit in secunda, tertia, aut quarta nota dividendi, quoties prima ejusdem divisoris nota continetur in prima nota dividendi, tunc quotum una, vel pluribus unitatibus esse minuendum. 2. In quoto nunquam reponi numerum majorem novenario, etiamsi divisor pluries, quam novies contineatur in dividendo. 3. Integrum quotum totum tot figuris constare, quot sunt divisionis membra.

Sit aliud exemplum. Dividere oporteat numerum datum *M* per numerum *N*.

```
N 1 7 9 )         M 7 3 3 9 4 4 7 5
                    7 1 6
                    -----
R 4 1 0 0 2 5 )   - 1 7 9
                    1 7 9
                    -----
                    0 0 0 4 4 7
                          3 5 8
                          -----
                          - 8 9 5
                            8 9 5
                            -----
                            0 0 0
```

1. Secerne puncto ex dividendo M tres figuras 733, quot sunt in divisore N, erit primum divisionis membrum 733. Jam prima divisoris nota continetur in prima dividendi nota septies, sed cum secunda, & tertia divisoris nota contineri non possint in secunda, & tertia nota dividendi pluries, quam quater, minuitur 7 tribus unitatibus, & ponitur in R quotus 4.

2. Duc divisorem N in 4, & productum 716 subscribe ipsi 733, a quo subtrahendum est, remanent 17. Adde ex dividendo subsequentem figuram 9, faciunt 179, eritque secundum divisionis membrum, in quo patet, divisorem contineri semel, proinde pone in quoto 1, per quem multiplicando divisorem, habetur productum 179, subducendum ex ipso 179, adeoque remanet 0.

3. Divisor contineri non potest in duabus subsequentibus dividendi figuris 44, pone ergo in quoto totidem cyphras, & adde ad 44 aliam figuram ex dividendo, nempe 7, quæ faciunt 447, in quibus divisor continetur bis. Pone igitur in quoto 2, & cetera prosequere, ut supra. Erit quotus R 410025 sine ullo residuo.

Schol. I. *Quod remanet post singulas subtractiones, nunquam potest esse æquale, aut majus divisore, alias fuit erratum. Assumptus enim fuit quotus justo minor. Contra vero si productum ex quoto in divisorem majus sit residuo divisionis, ex quo fieri debet subtractio, ita ut subtractio fieri non possit, signum est, quotum assumptum esse justo majorem, ac proinde esse minuendum. Utrumque casum tyrones diligenter advertant.*

Schol.

Schol. II. *Si absoluta divisione, aliquid remanet, ut in primo exemplo contigit, residuum illum ponitur supra lineam, & sub eodem ponitur divisor, atque hinc oriuntur fractiones, de quibus in Capite* III.

Schol. III. *Qui sunt in hac dividendi praxi peritiores, producta ex singulis quotis in divisorem non subscribunt, sed illa memoria retinentes, statim subtrahunt ex membro divisionis, & notant residuum. Sit dividendus numerus* A *per* B, *quotus* 2 *ductus in divisorem* 43, *nempe* 86, *non subscribitur ipsi* 87, *sed immediate mente subtrahitur, notaturque sub eodem* 87 *residuum* 1. *Sic etiam invento divisore* 3, *ductoque in* 3, *& in* 4 (*divisoris notas*) *producta* 9, *&* 12 *non subscribuntur sub* 146, *sed subtrahuntur statim, ac notatur primo* 7, *deinde* 1, *hoc est residuum* 17, *sub ipso* 146. *Quod compendium valde juvat.*

B 4 3	*A* 8 7 4 6
———	– 1 4 6
2 0 3	1 7

Schol. IV. *Si divisor habeat in fine unam, vel plures cyphras, ut* 120, 300, 4000 *&c. abscinduntur ab illo cyphræ, totidemque figuræ a dividendo dextrorsum; deinde fit, ut moris est, divisio cum reliquis figuris : sed absoluta operatione, figuræ ex dividendo abscissæ ponuntur supra lineam, infra quam ponitur divisor integre sumptus cum cyphris. Ut si dividendus sit* 635 *per* 200. *Abscinde duas cyphras ex* 200, *& duas figu-*

ras dextrorſum ex dividendo 635 ; *diviſo deinde* 6 *per* 2 , *habetur quotus* 3 $\frac{35}{200}$. *Quod ſi primæ diviſoris nota fuerit* 1 , & *reliquæ omnes cyphræ; ut* 10, 100 , 1000 &c. *confecta erit diviſio* , *ſi ad dexteram dividendi abſcindas totidem figuras* , *quot ſunt in diviſore cyphræ* , *nam unitas non dividit* . *Proinde dividendo* 145690 *per* 10000 , *quotus erit* 14 $\frac{5690}{10000}$; *dividendo per* 1000 , *quotus erit* 145 $\frac{690}{1000}$ &c.

Schol. V. *Eſt alius non inelegans dividendi modus* , *quem Itali vulgo vocant* , partire per ripiego; *qui tunc ſolum adhiberi poteſt* , *cum diviſor poteſt reſolvi in ſuos factores : Sit dividendus numerus* 15460 *per* 45 , *quia diviſor* 45 *reſolvi poteſt in ſuos factores* 5 & 9 , *ex quibus componitur*, *divide primo per* 5 , *quotus eſt* 3092 : *divido deinde quotum* 3092 *per* 9 , *oritur quotus quæſitus* 343 $\frac{5}{9}$. *Similiter dividendus ſit* 13463 *per* 36 , *qui* 36 *componitur ex* 4 & 9 , *divide per* 4 *numerum datum* , *quotus erit* 3365 $\frac{3}{4}$, *hunc divide per* 9 , *quotus erit* 373 $\frac{8}{9}$. *Ut ex duabus illis fractionibus fiat unica fractio* , *duc reſiduum* 8 *in diviſorem* 4 , & *producto adde reſiduum primum* 3 , *fit* 35 . *Duc deinde* 4 *in* 9 *fit* 36 , *erit fractio* $\frac{35}{36}$, *unde* 373 $\frac{35}{36}$ *quotus quæſitus* . *Ratio hujus ſuo loco innoteſcet*.

Examen diviſionis fit per multiplicationem. Nam multiplicando diviſorem per quotum , reſtituitur numerus dividendus, modo illi addatur , ſi quid ex diviſione remanſit.

Vel fit examen per abjectionem 9 , vel 7. Nam rejectis primo 9 , vel 7 tum ex diviſore, tum ex quo-

quoto, residua 8 & 4 notantur in angulo crucis sinistro *A* & *B*, & ducuntur inter se, deinde producti residuum 5, abjectis 9 vel 7, ponitur in vertice ipsius crucis, cui quidem additur residuum divisionis factæ, ablatisque ex hac summa 9, vel 7, quod remanet, ut hic 0, ponitur in angulo crucis dextero *C*, cui æquale debet esse id, quod restat ex dividendo, abjectis pariter 9, vel 7., & notatur in *E*. Patet sequenti exemplo.

			5		
3 5	4 5 6 3	*A* 8	0 *C*	0	6
	1 0 6	—	—	—	—
1 3 0	1 3	*B* 4	0 *E*	4	6

Demonstr. Ex praxi a nobis tradita tot notis constare debet quotus, quot sunt membra divisionis, ut *in Coroll. n.* 3. dictum est. Sed singulæ quoti notæ toties unitatem continent, quoties singula divisionis membra divisorem: nam in primo exemplo, in quo dividitur 186730 per 45, primum membrum divisionis 186 continet quater divisorem 45, sicuti prima quoti nota 4 continet unitatem. Siquidem ex regula tradita ducitur 45 in 4, & productum 180 (divisoris 45 quadruplum) subtrahitur ex membro divisionis 186, ergo patet, divisionis membrum 186 quater continere divisorem, sicuti quotus 4 totidem unitates continet, alias subtrahi non posset. Remanet quidem, facta subtractione, numerus senarius, sed hic sequenti figuræ 7 jungitur pro secundo divisionis membro, ut dictum est. Pari ratione idem osten-

ostenditur de singulis ipsius quoti notis ; unde sequitur, integrum quotum 4149 toties unitatem continere , quoties dividendus 186730 continet divisorem 45 , adeo ut quotus 4149 æque multiplex sit unitatis, ac dividendus æque multiplex est divisoris, & supersint 25.

PROPOSITIO VII.

De divisione integrorum per numeros divisoris multiplices.

Methodus dividendi numerum per numeros divisoris multiplices adhiberi potissimum solet, cum numerus dividendus est valde prolixus.

Sit exemplum. Ex doctrina Tychonis sol motu diurno horarum 24 peragit orbitam milliariorum Italicorum 2140011712 , quæritur quot milliaria conficiat uno horæ minuto. Reducantur horæ 24 in minuta, multiplicando illas per 60 , erit divisor, per quem dividi debet numerus milliariorum *A*, 1440 , seu 144, (ablata ab ipso cyphra, & ex dividendo *A* ultima nota dextrorsum 2) qui ponatur ad dexteram dividendi, ut in *B* , & notetur punctum sub tertia ipsius dividendi nota 4, cum divisor *B* semel contineatur in 214 , ut in *præc. Propos.* dictum est. Tum scribantur sub ipso divisore *B* singuli multiplices 288, 432, 576 &c. cum notis appositis 1, 2, 3, 4 &c. ut in exemplo.

Quia

Quia divisor *B* continetur semel in 214, scribatur 1 in quoto *C*, subtractoque divisore ipso ex 214, remanent 70, additaque sequenti figura dividendi, fiunt 700. Tunc observetur qualis ex multiplicibus sub *B* existentibus sit proxime minor, quam 700, patet illum esse 576. Pone igitur in quoto notam illi appositam 4, & subtrahe ipsum 576 ex residuo 700, remanent 124, quibus addita figura sequenti, habetur 1240. Iterum observa, qualis multiplex sit proxime minor ipso 1240; reperitur 1152, cui apposita est nota 8, hanc pone in quoto *C*, & illum subtrahe ex residuo 1240, residuum est 88, & sic deinceps, donec exhauriantur omnes dividendi figuræ. Sic enim nullo fere labore invenitur quotus 1486119, cum residuo $\frac{352}{1440}$, quod quartam fere milliarii partem importat, ut in *Cap. sequen.* explicabitur. Sol igitur unico horæ minuto conficit milliaria Italica 1486119.

```
 C              A                     B
1 4 8.....) 2,1 40,01 1,7 1 2     1 4 4 | 1
            1 4 4                 2 8 8 | 2
           ———————                4 3 2 | 3
          —7 0 0                  5 7 6 | 4
           5 7 6                  7 2 0 | 5
           ———————                8 6 4 | 6
           1 2 4 0              1 0 0 8 | 7
           1 1 5 2              1 1 5 2 | 8
           ———————              1 2 9 6 | 9
          —8 8.....
```

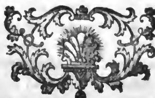
Schol.

Schol. I. *Est etiam facillima divisio per tabellas Neperianas, de quibus dictum est in Schol.* 4. *Propos.* v. *quæ ex hac Propos. sequitur. Nam esto dividendus numerus* A 142188 *per* B 578. *Apponantur tres tabellæ, quæ in vertice referant divisorem* 578, *præfixa illis tabella numerorum exponentium* 1, 2, 3, 4, *&c.* (*vid. tabellam* XZ *pag.* 19.) *Tum determinentur puncto in numero dividendo tot notæ, quot divisibiles sunt per* 578, *nempe* 1421. *Patet exponentes* 1, 2, 3, 4, *indicare summas multiplices, hoc est duplum, triplum, quadruplum &c. ipsius divisoris* 578; *quod ex ipsa constructione tabellarum, & ex Schol. præcit. facile intelligitur. Collectis enim in unam summam numeris ex triangulis, & rhombis directe ad exponentem ex. gr.* 2 *appositis, habetur duplum ipsius* 578, *nempe* 1156, *& sic de aliis. Observa igitur qualis numerus sit æqualis, vel proxime minor dividendi membro* 1421, *occurrit statim in secundo ordine summa* 1156, *proinde ejusdem ordinis exponens, nempe* 2, *est quotus quæsitus, qui ponatur in* C, *subtractisque* 1156 *ex dividendo* 1421, *remanent* 265. *Pro secundo divisionis membro adde sequentem notam* 8, *fiunt* 2658, *& eodem modo operare: hoc est observa in tabellis, qualis sit numerus proxime minor* 2658 *invenies in quarto ordine summam* 2312, *quæ indicat quotientem* 4 *ponendum in* C, *subtractisque* 2312 *ex* 2658, *residuum est* 346. *Addita demum ultima figura* 8, *fiunt* 3468, *quæ in tabellis quæsita, dant quotum* 6 *sine ullo residuo. Est ergo quotus* 246. *Quod totum tum ex tabella præ-*

præcitata XZ, *tum ex sequenti schemate satis patet.*

C 246	A 142188	B 578
	1156	
	-2658	
	2312	
	-3468	
	3468	
	0000	

Schol. II. *Si membrum dividendum minus sit ipso divisore, additur quoto cyphra, & alia figura membro dividendo adjicitur, ut in Prop. VI. dictum est. Ceterum si quis in hac dividendi praxi sit aliquanto exercitatus, divisiones etiam prolixas citissime expediet, eritque minus obnoxius erroribus, qui inter dividendum ex incuria, vel hallucinatione nascuntur.*



CAPUT II.

De Calculo Denominatorum.

REgulæ vulgaris Arithmeticæ hactenus traditæ applicari jam debent numeris *denominatis*, hoc est numeris diversarum specierum. Quod quidem difficile non erit, si dignoscatur valor unius speciei respectu alterius; nimirum quot partes minoris speciei majorem speciem constituant. Sic ut addantur, vel subtrahantur dies, horæ, ac minuta, necesse est scire minuta temporis 60 unam horam, horas autem 24 diem unum efficere. Idem de monetis, ponderibus, ac mensuris valet: quæ licet pro diversitate Provinciarum, imo & Urbium variæ sint, modus tamen eas calculandi est ubique proportionaliter idem; adeo ut si quis unius loci monetas, pondera ac mensuras addere, subtrahere, multiplicare, ac dividere noverit, ad alterius quoque regionis calculum easdem regulas applicare facile poterit.

PROPOSITIO I.

De Additione numerorum denominatorum.

I. EXemplum sit de vulgari moneta Romana, quam componunt scuta, asses, & quadrantes; hoc est quadrantes 5 assem 1, & asses 100 scutum 1, quod decem denariis argenteis, seu juliis constat.

Dispo-

Diſponantur ſpecies ſimiles ſub ſimilibus; ac primo quidem loco dextrorſus ſpecies minimæ, tum ordine majores uſque ad maximam; ut in hoc exemplo collocentur primo quadrantes, ſecundo aſſes, tertio ſcuta; & ſi qua ſpecies intermedia deſit, vacuus ejus locus repleatur cyphra.

Tum addendo quadrantes 1, 4, 3, 0, fiunt 8, quibus continetur aſſis 1, & remanent 3, quæ ſcribe infra lineam. Adde deinde aſſem 1 ad ſequentem ſeriem aſſium, nempe ad 5, 0, 8, 5 fiunt 19 aſſes. Scribe 9 infra lineam, & pro decade una adde 1 ad aſſium decades 1, 2, 9, 3, ſunt decades 16, hoc eſt aſſes 160; reſerva itaque decades 10, (centenarium nempe 1) pro ſequenti ſpecie, & ſcribe infra lineam 6. Addantur denique unitates, decades, & centena ſcutorum eo modo quo factum eſt *in Propoſ.* 2. *Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei, prodibit ſumma ſcutorum 5099, aſſes 69, quadr. 3.

	Scut.	*Aſſ.*	*Quad.*
	2 3 0.	3 5.	0.
	5 7 2.	9 8.	3.
	7 8 4.	2 0.	4.
	3 5 1 2.	1 5.	1.
Summa	5 0 9 9.	6 9.	3.

II. Libra in Urbe conſtat unciis 12, uncia vero denariis 24. Addendæ ſint ergo

	Lib.	*Unc.*	*Den.*
	38.	10.	23.
	70.	11.	16.
	352.	05.	22.
Summa	462.	04.	13.

Habentur libræ 462, unc. 4, den. 13. Nam denarii 22, 16, 23 additi faciunt 61, in quibus bis continetur 24, hoc eſt unciæ 2, quæ ſequenti columnæ addendæ ſunt, & remanent denarii 13, quos ſcribe infra lineam. Similiter unciæ 5, 11, 10 cum duabus præcedentibus faciunt 28, qui continet bis 12, nempe libras 2, ſequenti columnæ addendas, & remanent unciæ 4, quæ pariter ſcribuntur infra lineam. Demum additis libris 2 ad prædictam librarum columnam, continuatur additio, ut in *Propoſ.* 2. *Cap.* 1, & habentur libræ 462, unc. 4, den. 13.

III. Addendi ſunt pedes Pariſienſes, pollices, & lineæ. Pes autem Pariſienſis in pollices 12, pollex vero in lineas 12 dividitur. Sint ergo

	Pedes	*Poll.*	*Lin.*
	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
Summa	1022.	06.	6.

Quod quidem manifeſtum eſt: nam 7, 2, 9 faciunt lineas 18, hoc eſt pollicem 1, qui reſervatur

vatur ſequenti columnæ addendus, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Deinde pollices 8, 11, 10 cum 1 præcedenti, fiunt 30, qui bis continent 12, hoc eſt pedes 2 ſequenti columnæ addendos, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Demum additis pedibus 2 ad primam columnam ſequentem, continuatur additio, ut in *Propoſ.* 2. *Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei.

Examen fieri poteſt ſic: completa ſuperioris exempli additione, duc lineam ſub ordine numerorum *A*; atque iterum adde omnes numerorum ordines modo jam explicato, præter ſolum ordinem *A*, qui relinquitur: habebis alterum aggregatum *C*, quod deficit ab aggregato primo *B*, defectu numerorum ordinis *A*. Si ergo aggregato *C* addas numeros *A*, habebis aggregatum *D* æquale aggregato primo *B*; alias fuit erratum. Hoc examen uſurpari quoque poteſt pro numeris homogeneis, ut patet.

	Ped.	*Poll.*	*Lin.*
A	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
B	1022.	06.	6.
C	893.	07.	9.
D	1022.	06.	6.

PRO-

PROPOSITIO II.

De Subtractione numerorum denominatorum.

DIsponantur species similes sub similibus, ut in *præc. Propos.* dictum est, & numerus minor, seu subtrahendus, collocetur sub majori, a quo debet subtrahi.

Quoties inferior numerus a superiori subduci nequit, utpote illo major, toties numero superiori addatur unum integrum sequentis speciei, ut fiat major subtrahendo. Deinde numerus speciei, ex qua sumptum fuit illud integrum, unitate minuatur. Quod exemplis patebit.

I. Ex pecunia accepta *A* subtrahenda sit pecunia expensa *B*. Quia quadrantes 4 subtrahi nequeunt ex quadrantibus 3, sumo 1 ex assibus 28, hoc est quadrantes 5, qui cum 3 faciunt quadrantes 8, ex quibus subductis 4, remanent 4 infra lineam scribendi. Deinde minuendo unitate asses 28, vel augendo unitate (idem enim est) asses 36, ita ut prima figura 6 fiat 7, subducitur 7 a superiori numero 8, & scribitur infra lineam residuum 1. Rursus quia 3 subtrahi nequit ex 2, sumo 1 ex scutis, ut ad 2 addantur 10, ac fiat 12, ex quo subtractis 3, residuum, quod scribitur infra lineam, est 9. Minuitur deinde 8, vel augetur 7 unitate, & fit 0. Tum continuatur subtractio, ut in *Prop.* 4. *Cap.* 1., & habetur residuum *C* scut. 140, ass. 91, quadr. 4.

Scut.

	Scut.	*Ass.*	*Quadr.*
A	198.	28.	3.
B	57.	36.	4.
C	140.	91.	4.

II. Subtrahendus sit numerus *N* ex numero *M*, scilicet

	Dies.	*Horæ.*	*Min.*
M	21.	14.	53.
N	10.	13.	57.
Q	11.	00.	56.
	21.	14.	53.

Cum minuta 57 subtrahi nequeant ex minutis 53, desumitur unum integrum ex sequenti specie, nempe hora 1, seu minuta 60, quæ addita minutis 53 faciunt min. 113, ex quibus subtractis 57, scribitur infra lineam residuum 56. Aucto deinde unitate numero 13 fit 14, adeoque facta subtractione, nullum est residuum, & scribitur 0. Demum subductis 10 ex 21 residuum est 11, est ergo numerus quæsitus *Q* dies 11 min. 56.

Examen fit addendo residuum *Q* numero minori *N*, nam facta additione, ut in *Propos. præc.* dictum est, restituitur major numerus *M*, si erratum non fuerit.

PRO-

PROPOSITIO III.

De Multiplicatione numerorum denominatorum.

PRimo reducantur omnes ſpecies ad minimam, ut ſi multiplicandæ ſint libræ, ſolidi, ac denarii, reducantur omnes ad denarios. Deinde ſpecies reductæ multiplicentur, ut moris eſt, per *Propoſ.* 5. *Cap.* 1. Productum vero reducitur ad majorem ſpeciem per diviſionem.

I. *Sit exemplum*. Plancus expendit ſingulis diebus libras 5, ſolidos 15, denarios 8. Scire cupit, quantum toto anno, ſeu diebus 365 expendet. Cum denarii 12 ſolidum unum, ſolidi vero 20 libram conſtituant, duc libras 5 in 20; & producto adde 15, habebis ſolidos 115. Quos quidem duc in 12, & producto adde 8, habebis denarios 1388; qui multiplicandi ſunt per dies 365, fitque per *Prop.* 5. *Cap.* 1. productum denariorum 506620. Hos divide per 12, habebis ſolidos 42218, & denarios 4; Utque ſolidi ad libras reducantur, divide illos 20, erunt libræ 2110, & ſolidi 18. Itaque Plancus uno anno expendet lib. 2110, ſol. 18, den. 4. En totius reductionis typus.

	20
Lib.	5
	100
adde	15
Sol.	115

Sol.

Sol. 115
12

230
115

1380
adde 8

Den. 1388

II. *Sit exemplum*. Cum sol motu proprio conficiat singulis diebus minuta 59, & secunda 8, quæritur quantum progrediatur diebus 30. Reducantur minuta 59 ad secunda, multiplicando illa per 60, & addendo 8 ad eorum productum, fient secunda 3548, quæ multiplicari debent per dies 30. Erit per *Propos.* 5. *Cap.* 1. productum 106440 secundorum. Hæc divide per 60, quotus dat minuta 1774, quæ quidem si iterum dividas per 60, habebis gradus 29, & min. 34, quos sol motu proprio percurrit in Ecliptica diebus 30.

Examen multiplicationis fit per divisionem, de qua *in sequenti Propos.*

PROPOSITIO IV.

De divisione numerorum denominatorum.

TAm divisoris, quam dividendi species reducantur ad minimam, ut factum est in *præc. Propos.* Tum fiat divisio *per Propos.* 6. *Cap.* 1.

 I. Emit

I. Emit quis ſerici ulnas *6*o, pal. *6*, unc. 10, expenditque ſcuta Romana 2*9*2, aſſes 10, quæritur quanti ſteterit ulna. Duc ulnas *6*o in 8, ut fiant palmi; & adde producto *6*, erunt palmi 48*6*. *H*os duc in 12, ut fiant unciæ, additiſque unciis 10, erunt unciæ 5842. Reducantur pariter ſcuta ad aſſes, & addantur aſſes 10, fient aſſes 29210. Itaque dividantur per *Prop.* *6*. *Cap.* 1. aſſes 29210 per 5842, quotus eſt 5: hoc eſt uncia quælibet valet aſſibus 5, proinde unciæ 12, ſeu palmus, valet aſſibus *6*o, adeoque palmi 8, ſive ulna, valet aſſibus 480, hoc eſt ſcut. 4, aſſibus 80.

II. Fingamus lunam diſtare ab aliqua fixa gr. 45, min. 30, ſec. 25, quæritur quanto tempore ſtellam illam luna aſſequetur. Ex Tab. Alfonſinis luna motu ſuo diurno conficit gr. 13. min. 10, ſec. 35. Proinde dividendi ſunt gradus 45, min. 30, ſec. 25 per gradus 13, min. 10, ſec. 35, ut habeatur appulſus lunæ ad fixam.

Primo duc gr. 45 in *6*o, & producto adde 30, fient minuta 2730. Hæc duc rurſus in *6*o, & adde producto 25, habebis ſec. 1*6*3825, numerus ſcilicet dividendus. Eodem pacto invenietur diviſor, nempe min. ſec. 47435. Tum facta diviſione per *Propoſ.* *6*. *Cap.* 1. habetur quotus 3, hoc eſt dies 3, & remanent $\frac{21520}{47435}$ partes ſcilicet unius diei, ex qua fractione eruuntur horæ 10, min. 53 circiter, modo explicando in *Propoſ.* 4. *Cap.* 3. Luna igitur ad ſtellam perveniet diebus 3, horis 10, min. 53.

Examen diviſionis fit per multiplicationem.

Nam

Nam si in exemplo primo multiplicaveris per *Propos. praec.* ulnas 60, pal. 6, unc. 10 per scut. 4 ass. 80, hoc est uncias 5842 per asses 480, fiet productum 2804160, quod divisum primo per 12, deinde per 8, dabit in quoto scut. 292. 10. Similiter in secundo exemplo ducto divisore 47435 in quotum 3, additoque ad productum residuo 21520, restituitur numerus, qui fuit divisus 163825.

CAPUT III.

De Calculo Fractorum.

DEFINITIONES.

NUmerus fractus, qui & *fractio*, vel *minutia* dicitur; est pars, seu partes alicujus numeri integri in plures aequales partes divisi. Ut si totum aliquid dividatur in tres partes aequales, & ex illis quispiam duas partes obtineat, dicetur habere duas tertias partes, scilicet $\frac{2}{3}$, quae fractionem efficiunt.

Itaque ad numeros fractos exprimendos duo numeri requiruntur, alter qui scribitur supra lineam, & dicitur *Numerator*, quia numerat partes, quae de illo toto diviso habentur: alter qui scribitur infra lineam, & dicitur *Denominator*, seu *Nominator*, quia nominat in quales partes illud totum fuerit divisum, nempe tertias, quartas, nonas &c. videlicet.

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{20}$ &c.

Quæ fractiones sic pronunciantur, *una dimidia*; *una tertia*, *duæ septimæ*, *quatuor nonæ*, *undecim vigesimæ &c.* intelligitur pars, seu partes.

Si numerator æqualis sit denominatori, minutia æqualis est uni integro. Sic $\frac{3}{3}$ æquivalent uni integro in tres partes æquales diviso. Adsunt enim omnes partes illius integri, adeoque $\frac{3}{3}$ sunt 1. Item $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{8}$ &c. significant 1. Hinc patet, unitatem esse illud totum divisum in partes tertias, quintas, sextas &c.

Si numerator fuerit denominatore major, tunc minutia erit plus quam unum integrum. Sic $\frac{4}{3}$ plus sunt quam unum integrum in tres partes divisum, sed important 1, & insuper $\frac{1}{3}$. Similiter $\frac{11}{3}$ significant tria integra, & adhuc $\frac{2}{3}$.

II. *Minutia minutiæ* est pars alterius minutiæ; ut si fractionis $\frac{3}{4}$ sumatur dimidia pars, nempe $\frac{3}{8}$, erit hæc minutia minutiæ, quæ a majori distingui solet per interpositam lineam. Sic $\frac{1}{2}|\frac{3}{4}$ significat dimidium trium quartarum.

Compendii gratia utemur in posterum signis, quæ sequuntur.

$=$ *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ significat duas quantitates a & b esse æquales.

$+$ *Plus*. *Signum additionis*. Ut $a + b$ significat summam duarum quantitatum a, & b. Sic $3 + 5$ significat summam 8, & exprimitur $3 + 5 = 8$.

$-$ *Minus*. *Signum subtractionis*. Ut $a - b$ significat a minus b, hoc est a quantitate a subtractam esse quantitatem b. Sic $5 - 3 = 2$.

$\times$ *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ significat a mul

a multiplicatum in *b*, vel per *b*. Ut $3 \times 5 = 15$.

: : *Signum proportionum æqualium*. Sic *a* . *b* : : *c* . *d* denotat eandem esse proportionem inter *a* & *b*, quæ est inter *c* & *d*. Ut 2 . 4 : : 3 . 6. Item 1 . 3 : : 9 . 27 &c.

∺ *Signum proportionis continuæ*. Sic ∺ *a*, *b* *c*, denotat *a* esse ad *b*, sicuti *b* ad *c*. Ut 2,4,8.

AXIOMATA

I. UNitas se habet ad fractionem, ut denominator ad numeratorem. Sic $1 \cdot \frac{2}{3} :: 3 . 2$. Unitas enim ex dictis est totum divisum, quod se habet ad partem, (quæ est fractio) ut fractionis denominator (qui est totum, quod fuit divisum) ad sui partem, nempe ad numeratorem.

II. Minutiæ, quarum denominatores habent ad suos numeratores eandem rationem, sunt inter se æquales, & valent omnino idem. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{100}{200}$ &c. sunt fractiones æquales, idemque significant. Quod ex primo *Axiom.*, tum etiam per se patet. Nam singulæ hæ fractiones unius integri medietatem important. Hinc fractorum valor non ex magnitudine numerorum, quibus exprimitur, sed æstimari debet ex proportione majori, vel minori, quam numerator habet ad suum denominatorem; proinde major est $\frac{1}{2}$, quam $\frac{1}{10}$, vel $\frac{1}{100}$ &c.

III. Minutia, cujus tam numerator, quam denominator per eundem numerum multiplicantur, aut dividuntur, valorem non mutant. Sic multiplicando $\frac{2}{3}$ per 5 oritur $\frac{10}{15}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

2. *Axiom.* Pariter dividendo $\frac{10}{15}$ per 5, fit $\frac{2}{3}$ ejusdem valoris cum $\frac{10}{15}$. Item divisis $\frac{3}{9}$ per 3, fit $\frac{1}{3}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

Schol. *Multum interest, ut tyrones hactenus dicta bene intelligant, prius quam ad fractorum regulas addiscendas procedant, alioquin difficilia illis, & valde obscura erunt, quæ sequuntur.*

PROPOSITIO I.

Datis duobus numeris, maximam eorum communem mensuram invenire.

MEnsura duorum numerorum communis dicitur numerus, qui illos exacte, & sine residuo dividit; seu numerus, qui aliquoties sumptus illos adæquat. Sic 3 dicitur mensura communis numerorum 12 & 21, quia alterum quater, alterum septies sumptus adæquat. Dicitur autem mensura maxima numerus, per quem solum duo numeri reducuntur ad numeros primos, seu minimos.

I. Dati sint duo numeri *A* & *B*, quorum mensura communis maxima quæritur. Dividatur major *A* per minorem *B*, & neglecto quoto, notetur residuum C: deinde *B* dividatur per residuum C, tum residuum C per residuum *D*, & sic deinceps nulla habita exponentium ratione, donec tandem divisor occurrat *F*, qui præcedentem exacte dividat sine ullo residuo; hic erit maxima communis mensura quæsita.

Exempl

Exempl. 1.	*A* 234	*Exempl.* 2.	438
	B 144		102
	C 90		30
	D 54		12
	E 36		6
	F 18		0
	0		

II. Quod ſi poſt omnem diviſionem remanet 1, ſignum eſt, nullam reperiri poſſe communem menſuram inter numeros datos, eoſque eſſe inter ſe primos.

Dati ſint numeri *M* & *N*, divide majorem *M* per *N*, & neglecto quoto, nota reſiduum *R*, ac ſic deinceps proſequere; occurrit demum 1, adeoque numeri dati *M* & *N* ſunt inter ſe primi.

Exempl. 1.	*M* 134	*Exempl.* 2.	269
	N 49		147
	R 36		122
	S 13		25
	10		22
	3		3
	1		1

Demonſtr. per ſe manifeſta eſt. Nam per continuam illam numeri minoris a majori ſubtractionem (diviſio enim eſt compendioſa ſubtractio) devenitur tandem ad partem aliquotam, vel aliquantam numerorum datorum. In primo caſu pars illa aliquota erit maxima communis menſura duorum numerorum; in ſecundo caſu evidens eſt, nul-

nullum alium numerum, præter unitatem, metiri posse numeros datos, adeoque sunt inter se primi (*per Defin.* 8.)

Schol. *Nota, quemlibet numerum se ipsum semel metiri; proinde dari potest mensura communis maxima inter duos numeros, quorum alter simplex sit, seu primus, & alter compositus. Sic 7 est maxima communis mensura inter 7 & 21. Nam utroque diviso per 7, habetur 1 & 3. Item 5 & 75 divisi per 5, faciunt 1 & 15, adeoque 5 est maxima communis mensura; & sic de aliis.*

PROPOSITIO II.

Fractiones ad minimos terminos reducere.

Fractio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia illi æqualis, nempe valoris ejusdem, minimis tamen terminis expressa reperitur.

I. Data sit fractio $\frac{160}{296}$ ad minimos terminos reducenda, quæratur maxima communis mensura inter numeratorem, & denominatorem, per *Propos. præc.* invenietur 8. Per hunc divide tam 160, quam 296, fiet minutia ejusdem valoris, & minimis terminis expressa $\frac{20}{37}$ per *Axiom.* 3.

II. Sit minutia data $\frac{60}{96}$ reducenda ad minimos terminos. Inveniatur maxima communis mensura inter 96, & 60, per *Propos. præc.* erit 12, per quem diviso utroque datæ fractionis termino, habetur nova fractio $\frac{5}{8}$ minimis terminis expressa. Hæc praxis vulgo dicitur *schisare i rotti*.

Demonstratio patet ex 3. *Axiom.*

PRO-

PROPOSITIO III.

Fractiones ad idem nomen reducere.

FRactiones reducere ad idem nomen, est efficere, ut fractiones diversorum denominatorum eundem denominatorem acquirant, sed idem valeant, quod prius.

I. Sint duæ fractiones *A* & *B* ad commune nomen reducendæ. Duc inter se ad invicem denominatores 5 X 4, & 4 X 5, erit denominator communis 20. Pro numeratoribus inveniendis multiplica per crucem, seu decussatim, numeratorem unius minutiæ per denominatorem alterius, hoc est 2 X 4, & 3 X 5, erunt novi numeratores 8 & 15, qui directe collocandi sunt sub illa minutia, cujus numerator fuit multiplicatus, ut in sequentibus duobus exemplis apparet. Habentur ergo duæ novæ fractiones *C* & *D* ejusdem nominis, ut patet, & quidem valoris ejusdem per 3. *Axiom.*

Nam termini fractionis *A* multiplicantur per eundem numerum, hoc est per 4 denominatorem fractionis *B*, unde oritur fractio *C* priori æqualis per *Axiom. cit.* Similiter termini fractionis *B* multiplicantur per 5 denominatorem fractionis *A*, & oritur fractio *D* priori æqualis per idem *Axiom.* ergo fractiones C & *D* idem valent ac duæ priores.

A $\frac{2}{5}$ X $\frac{3}{4}$ *B*		$\frac{2}{6}$ X $\frac{10}{15}$	
C $\frac{8}{20}$	$\frac{15}{20}$ *D*	$\frac{30}{90}$	$\frac{60}{90}$

II. Quod si reducendæ sint ad idem nomen plures quam duæ fractiones, ut *A*, *B*, *C* &c. duc omnes denominatores inter se $3 \times 4 \times 5$ fiet *F* communis denominator 60, qui divisibilis est per singulos denominatores 3, 4, 5, ut patet.

Ad inveniendos itaque novos numeratores, divide communem denominatorem 60 per 3 denominatorem fractionis *A*, quotus est 20, tertia scilicet denominatoris communis pars, quem duc in numeratorem 2, habebis 40 duas tertias partes ipsius 60, adeoque $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ per *Axiom.* 2.

Similiter diviso 60 communi denominatore per denominatorem 4 fractionis *B*, habetur 15 quarta pars ipsius 60. Duc 15 in 3 habebis 45, tres quartas partes ejusdem 60, adeoque $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ per *Ax.* 2. Eadem ratione invenitur $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Proinde fractiones datæ *A*, *B*, *C*, æquales sunt fractionibus *M*, *N*, *R*; quod per se manifestum est.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = 60\ F$$

$$\begin{array}{ccc} M & N & R \\ \frac{40}{60} & \frac{45}{60} & \frac{12}{60} \end{array}$$

Coroll. Ex hac Propos. innotescit, utra duarum, vel plurium fractionum datarum sit major. Nam si reducantur ad idem nomen, ex majori numeratore apparet, quæ sit major. Sic in superiori exemplo fractio *B* est ceterarum maxima, quod indicat numerator fractionis *N*.

Schol.

Schol. *Cum denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius, tunc duæ illæ fractiones facile reducuntur ad idem nomen, multiplicando per illum quotum terminos fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint reducenda ad idem nomen fractiones* $\frac{2}{3}$ *&* $\frac{7}{15}$, *quia* 3 *dividit exacte* 15, *multiplica per quotum* 5 *terminos fractionis* $\frac{2}{3}$, *oritur* $\frac{10}{15}$ *ejusdem nominis cum alia fractione. Quod est valde commodum in calculis Algebraicis, ut in nostris* Instit. Analyt. *annotavimus.*

PROPOSITIO IV.

Fractionem ad aliam dati nominis, & ejusdem valoris revocare.

I. DAta sit fractio $\frac{2}{3}$, quæ revocari debeat in aliam, cujus denominator datus sit *60*. Duc numeratorem 2 X *60*, & productum 120 divide per denominatorem 3, quotus 40 erit numerator minutiæ quæsitæ $\frac{40}{60}$, quæ quidem est ejusdem valoris cum minutia data per *Axioma* 2. nam 3. 2 :: *60*. 40. ut patet.

Data sit fractio $\frac{21520}{47435}$, quæ significet unius diei partes, ut in *Propos.* 4. *Cap.* 2. reducenda ad horas. Duc 21520 X 24, & productum divide per denominatorem 47435, quotus dat horas 10, & remanent $\frac{42130}{47435}$ partes unius horæ. Quæ ut ad minuta reducantur, duc 42130 X *60*, & productum divide per eundem denominatorem,

quotus dabit minuta prima 53, & remanent $\frac{13745}{47435}$ partes unius minuti primi. Ut invenias secunda duc. 13745 X 60, & dividendo per 47435, quotus dabit min. secunda 17. Luna igitur ad stellam pervenit diebus 3. hor. 10. min. 53. sec. 17.

II. Quod si datæ fractionis denominator non exacte dividit productum, ut si $\frac{2}{3}$ reduci debeant ad fractum, cujus denominator est 8, productum 16, quod oritur ex 2 X 8, non exacte dividitur per denominatorem 3, nam remanet 1: tunc ponatur quotus 5 supra denominatorem datum 8, eique jungatur fractio orta ex residuo, nempe $\frac{1}{3}$, quæ erit fractionis fractio; & facit hunc sensum, duæ tertiæ in actavas redactæ dant quinque octavas, & unam tertiam unius octavæ, scilicet $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3}|\frac{1}{8}$. Quod autem $\frac{2}{3}$ idem valeant ac $\frac{5}{8} + \frac{1}{3}|\frac{1}{8}$ patet. Nam $\frac{1}{3}|\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ per *Propos.* 7. *hujus*; proinde $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{24} =$ (*per Ax.* 3.) $\frac{15}{24} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ per *Prop.* 2. *hujus.*

Schol. *Hinc habetur ratio explorandi valorem minutiarum in partibus earum notioribus; ut si scire velis quid valeant* $\frac{3}{5}$ *unius scuti Romani in juliis, vel assibus. Quia* 10 *julii, aut asses* 100 *efficiunt scutum Romanum* 1, *duc numeratorem* 3 *in* 10, *aut in* 100, *&* *productum divide per denominatorem* 5, *erunt in primo casu* $\frac{6}{10}$, *in secundo* $\frac{60}{100}$, *hoc est julii sex, aut asses* 60. *Item dantur* $\frac{3}{7}$ *unius pedis, scire volo quot pollices hæc fractio importet. Quia* 12 *pedem* 1 *efficiunt, duco* 3 X 12, *&* *productum* 36 *divido per* 7, *quotus dat* 5, *unde habentur* $\frac{5}{12}$ *hoc est pollices* 5, *&* *remanet* $\frac{1}{7}$. *Quod si iterum supponas pollicem divi-*

dividi in 12 lineas, facile erit explorare, quid importet una ſeptima pars unius pollicis. Hæc praxis vulgo dicitur valutare i Rotti.

PROPOSITIO V.

Fractiones ad integra revocare.

I. CUm numerator denominatore ſuo major eſt, fractio reducitur ad integra, dividendo numeratorem per denominatorem. Sic $\frac{12}{3}$ diviſæ per 3 dant integra 4. Item $\frac{60}{12}$ diviſæ per 12 dant 5 integra.

II. Quod ſi denominator non exacte dividit numeratorem, fit ex reſiduo minutia. Proinde $\frac{17}{3}$ diviſæ per 3 dant integra 5 $\frac{2}{3}$. Similiter $\frac{22}{7}$ diviſæ per 7 dant 3 $\frac{1}{7}$.

Schol. *Hinc habetur praxis reducendi monetas, pondera, ac menſuras in alias ſpeciei altioris. Sic aſſes* 350 *ſi dividantur per* 100, *reducuntur ad ſcuta Romana* 3 $\frac{50}{100}$, *ſeu* 3 $\frac{1}{2}$. *Pariter minuta* 120 *diviſa per* 60, *dant horas* 2. *Patet diviſores iſtos* 100, *&* 60 *eſſe denominatores minutiarum, per quos eorum numeratores dividuntur per hanc Propoſitionem.*



PRO-

PROPOSITIO VI.

Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.

Sit datus integer v. gr. 3 reducendus in fractum, cujus denominator sit 7. Multiplica integrum ipsum 3 per denominatorem datum 7, & producto subscribe ipsum denominatorem 7, erit fractio quæsita $\frac{21}{7}$. Similiter unitas reducenda sit in fractum, cujus denominator sit 5, erit $\frac{5}{5} = 1$ ex dictis ad *Definit.* 1. *Cap. hujus.*

Schol. I. *Si integro cuilibet supponatur unitas, fit fractio; vel quasi fractio integro æquivalens, ut* $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{8}{1} = 8$ *&c. quod pro multiplicatione, & divisione fractorum annotetur.*

Schol. II. *Hinc vero oritur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias inferioris speciei. Sint scuta Romana* 55 *reducenda ad asses, multiplica* 55 X 100, *habebis asses* 5500. *Item milliaria Romana* 50 *convertenda sint in passus, quia passus* 1000 *milliare* 1 *efficiunt, duc* 50 X 1000, *fient passus* 50000. *Patet in his exemplis numeros illos* 100, *&* 1000 *esse denominatores datos, per quos multiplicantur numeri integri* 55, *&* 50, *ut fiant fractiones* $\frac{5500}{100}$, $\frac{50000}{1000}$ *juxta hanc* Propos.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Fractionem fractionis ad simplicem fractionem reducere.

Duæ, vel plures fractiones fractionum ad unam simplicem fractionem reducuntur hoc pacto. Multiplica singulos numeratores inter se, & singulos pariter denominatores inter se, duo producta minutiam efficient æqualem omnibus illis minutiis minutiarum datis. Sit minutia minutiæ $\frac{1}{4}$) $\frac{2}{3}$) hoc est una quarta pars duarum tertiarum ad simplicem minutiam reducenda; duc inter se numeratores 1×2, & denominatores 4×3, erit nova quæsita minutia $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Similiter reducendæ sint ad simplicem minutiæ minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$, multiplicatis inter se $3 \times 2 \times 3$, item $4 \times 3 \times 5$, habetur nova minutia omnibus illis æqualis $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ per *Prop. 2. hujus*.

Demonst. sensibili aliquo exemplo res manifesta erit. Ponamus hanc ipsam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ desumptam fuisse ex uno scuto Romano, quod decem juliis constat; dico hanc minutiam minutiarum continere $\frac{3}{10}$ unius scuti, nempe tres julios. Nam $\frac{3}{5}$ unius scuti continent sex julios, cum julii duo sint $\frac{1}{5}$ unius scuti. At $\frac{2}{3}$ sex juliorum sunt quatuor julii, ut patet, & $\frac{3}{4}$ quatuor juliorum sunt tres julii. Ergo evidens est, minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ continere $\frac{3}{10}$, nempe tres julios.

Id facile illustrari potest dividendo lineam rectam in partes æquales tres, quatuor &c. Nam si quæratur dimidium unius tertiæ partis ejusdem lineæ, patet illam esse partem sextam totius. Divisis enim bifariam singulis illis tertiis ejus lineæ partibus, erit tota linea divisa in sex partes æquales; proinde $\frac{1}{2}$ unius tertiæ facit $\frac{1}{6}$. Quod erat &c.

Hæc regula apud vulgares Arithmeticos audit *infilzare i Rotti*.

PROPOSITIO VIII.

Fractiones addere.

I. SI fractiones addendæ sint ejusdem nominis, adde simul omnes numeratores, eorumque aggregato denominatorem subscribe. Sint addendæ $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ additis numeratoribus $1 + 2 + 5 + 6 = 14$, fit fractionum summa $\frac{14}{7} = 2$ per *Prop.* 5. hujus.

II. Si fractiones addendæ sint diversi nominis, reduc ad idem nomen per *Prop.* 3. & operare, ut dictum est.

III. Quod si addendi sunt integri cum fractis, adde seorsim integros, & seorsim fractos; ut si ad $4\frac{2}{5}$ addendi sint $3\frac{1}{5}$ fiet summa $7\frac{3}{5}$. Res per se patet.



PRO-

PROPOSITIO IX.

Fractiones subtrahere.

I. SI minutiæ ſunt ejuſdem nominis, minor earum ex majori ſubducitur, & reſiduo ſubſcribitur communis denominator. Sic $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$. Item $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$.

II. Si diverſi ſint nominis, reducantur ad idem nomen per *Prop.* 3., & operatio fit ut antea.

III. Si ab integris ſubtrahenda ſit aliqua fractio, reducantur integra ad fractionem ejuſdem nominis cum data fractione per *Propoſ.* 6., & cetera fiant, ut ſupra. Subtrahere oporteat $\frac{2}{3}$ ex 4, reduc 4 ad tertias, erunt $\frac{12}{3}$. Deinde $\frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ per *Propoſ.* 5. Similiter ſubtrahenda ſint $2\frac{1}{4}$ ex $5\frac{3}{4}$, hoc eſt $\frac{9}{4}$ ex $\frac{23}{4}$: reduc ad idem nomen has duas fractiones per *Propoſ.* 3. erunt $\frac{23}{4}$, & $\frac{9}{4}$, adeoque $\frac{23}{4} - \frac{9}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$, per *Propoſ.* 5.

Schol. *Ut minutiæ addi, vel ſubtrabi poſsint, ſemper idem nomen babere debent, quod notetur.*

PROPOSITIO X.

Fractiones multiplicare.

I. SI multiplicanda eſt fractio per fractionem, duc inter ſe numeratores, itemque denominatores inter ſe, res erit confecta. Multiplicanda ſit fractio $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ ductis 2×2, & 3×5, habetur

betur productum quæsitum $\frac{4}{15}$. Sic $\frac{2}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ per *Propos.* 2.

II. Quod si multiplicandus sit integer per fractum, vel fractus per integrum, semper integro suppone unitatem, ut fiat quasi fractio; deinde operare ut supra. Sit multiplicanda $\frac{2}{3} \times 7$, supposita integro unitate, erit $\frac{2}{3} \times \frac{7}{1}$, proinde productum $\frac{14}{3}$.

III. Si vero alter multiplicantium sit integer cum fracto, reducatur totus ad fractum, multiplicando illum per denominatorem ejusdem fracti; ut si multiplicari oporteat $2\frac{2}{3}$ per 6, fiat $\frac{8}{3} \times \frac{6}{1}$; erit productum $\frac{48}{3}$. Similiter si uterque multiplicator sit integer cum fracto, uterque reducitur ad fractum ejusdem nominis cum minutia sibi adhærente: ut sint multiplicanda $3\frac{1}{7} \times 5\frac{1}{3}$, reducantur ad fractos, erunt $\frac{22}{7} \times \frac{16}{3} = \frac{352}{21} = 16\frac{16}{21}$ per *Propos.* 5.

Demonstr. Ex regula tradita multiplicare fractum *A* per fractum *B* est producere fractum *C*, qui toties contineatur in fracto *B*, quoties fractus *A* continetur in unitate. Nam sicuti fractus *C* continetur bis in fracto *B*, ita fractus *A* bis continetur in unitate, ut patet; ergo ex definitione multiplicationis fractus *C* est productum fracti *A* multiplicati per fractum B.

$$A \ \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \ B \quad \frac{1}{10} \ C$$

Coroll. Hinc patet ratio, quare in minutiis productum multiplicationis *C* sit minus, quam factores *A* & *B*. Nam cum unitas sit ad *A*, ut

ut *B* ad *C* ex *Defin.* multiplicationis per *Prop.* 5. *Cap.* 1.; & unitas major fit quam *A*, etiam *B* major erit quam *C*, proinde *C* minor.

Schol. I. *Multiplicatio fractionum fit etiam eleganter per divisionem, dividendo scilicet denominatorem unius per numeratorem alterius minutiæ (modo divisibiles sint sine residuo); Sint enim multiplicanda* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$, *divide 9 per 3, & 10 per 2, fit* $\frac{3}{5}$ *productum quæsitum. Idem enim producitur, ac si more consueto multiplicentur. Nam* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ per *Prop.* 2.

Schol. II. *Si integrum cum minutia ducendum sit in integrum, quod exacte divisibile sit per denominatorem minutiæ, ut si ducendum sit* $38\frac{2}{3} \times 18$, *practici primo resolvunt integrum in fractum, fitque 116, deinde diviso 18 per denominatorem 3, habetur quotus 6, per quem multiplicant ipsum 116, & habetur productum quæsitum 696. Ratio per se patet.*

Schol. III. *Si vero integrum ducendum sit in minutiam, ut* $32000 \times \frac{6}{5}$, *practici prius dividunt 32000 per 5, deinde quotum 6400 ducunt in 6.*

PROPOSITIO XI.

Fractiones dividere.

I. SI termini divisoris exacte dividant terminos dividendi, fractus, qui inde oritur, erit quotus. Ut si dividenda sit minutia $\frac{4}{9}$ per $\frac{2}{3}$, di

visis

visis 4 per 2, & 9 per 3, quotus erit $\frac{2}{3}$. Similiter si denominator sit communis, satis erit dividere numeratorem per numeratorem, deleto denominatore; sic dividendo $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$, quotus erit 3; & dividendo $\frac{7}{8}$, per $\frac{3}{8}$, quotus erit $2\frac{1}{3}$. Item dividendo $\frac{5}{6}$ per $\frac{2}{6}$, deleto communi denominatore, quotus erit $\frac{5}{2}$.

II. Quod si termini divisoris non exacte dividant terminos dividendi, aut denominator non sit communis, tunc inverte divisorem, ita ut denominator ponatur loco numeratoris, numerator vero loco denominatoris, deinde duc tam numeratores inter se, quam denominatores inter se, productum erit quotus quæsitus. Dividenda sit minutia $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, inverso divisore, erit $\frac{2}{1}$ X $\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ quotus quæsitus. Ita si dividere oporteat $\frac{5}{8}$ per $\frac{1}{4}$, hoc est, si dicatur, $\frac{1}{4}$ unius scuti Romani dat $\frac{5}{8}$ unius ulnæ, quot ulnas dabit scutum unum: divisis (inverso divisore) $\frac{5}{8}$ per $\frac{4}{1}$, quotus dat ulnas $2\frac{1}{2}$. Nam $\frac{4}{1}$ X $\frac{5}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$ per *Prop.* 5. *hujus*.

III. Quoties occurrit fractus dividendus per integrum, satis est multiplicare denominatorem fracti per ipsum integrum. Sit dividendus $\frac{2}{5}$ per 2, duc 5 X 2, quotus erit $\frac{2}{10}$. Item $\frac{1}{3}$ divisus per 5, dat quotum $\frac{1}{15}$. Nam semper integro sopponitur unitas.

IV. Cum divisor, aut dividendus, vel uterque est integer cum minutia, reducendus est integer ad minutiam sibi adjunctam; ut fiat unica minutia, & operatio instituenda est, ut supra. Sint dividenda $24\frac{1}{5}$ per $\frac{2}{3}$, fient $\frac{121}{5}$ X $\frac{3}{2} = \frac{363}{10}$ $= 36$

$= 36\frac{1}{10}$ per *Propos.* 5. Similiter ſint dividenda $15\frac{1}{3}$ per $12\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{46}{3} \times \frac{2}{25} = \frac{92}{75} = 1\frac{17}{75}$.

Demonſtr. Dividere fractum *A* per fractum *B* eſt invenire quotum *C*, ad quem ita ſit unitas, ſicuti diviſor *B* ad dividendum *A* ex diviſionis definitione ad *Prop. 6. Cap.* 1. Sed unitas eſt ad fractum *C*, ut diviſor *B* ad dividendum *A*. Unitas enim eſt ad *C*, ut denominator 3 ad numeratorem 4 ex *Axiom.* 1. Fractus autem *B* eſt ad fractum *A*, ut 3 ad 4: nam redactis ad idem nomen *A* & *B* per *Prop.* 3. oriuntur fracti æquales *M* & *N*, qui ob communem denominatorem ſe habent ut 3 ad 4; ergo unitas eſt ad *C*, ut *B* ad *A*; proinde C eſt quotus quæſitus. Quod &c.

B	*A*	*C*		
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$		
M	*N*		$1 . \frac{4}{3} :: 3 . 4$	
$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$			

Coroll. Hinc patet ratio, cur in diviſione minutiarum quotus ſit major numero ipſo, qui dividitur; quod quidem accidit, cum diviſor minor eſt unitate. Nam cum diviſor ſit ad dividendum, ut unitas ad quotum, erit permutando diviſor ad unitatem, ut dividendus ad quotum, adeoque ſi diviſor minor eſt unitate, etiam dividendus debet eſſer minor quoto.

Schol. I. *Ubi occurrit integer magnus cum fracto dividendus per integrum, ut* $634\frac{2}{3}$ *per* 5, *pra-*

practici dividunt integrum per integrum, nempe 634 per 5, nulla habita ratione fractionis, ut inveniant quotum 126. Tum si quid remanet (ut hic 4) illud reducunt ad fractionem per Prop. *6., hoc est ad* $\frac{12}{3}$, *quam addunt ad fractum* $\frac{2}{3}$; *fitque summa* $\frac{14}{3}$ per Prop. 8., *quæ quidem summa divisa per 5 dat quotum* $\frac{14}{15}$ per hanc Propos. n. 3., *unde quotus quæsitus est* 126 $\frac{14}{15}$.

CAPUT IV.

De fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO I.

FRactiones Decimales sunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur mensura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea divisa in decem æquales partes, singulæ deinde hæ partes in alias decem partes, atque hæ singulæ rursus in alias decem, & sic deinceps, quantum quisque velit; oriuntur ex hac divisione partes decimæ, centesimæ, millesimæ, centesimæ millesimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ*, *secundæ*, *tertiæ*, *quartæ* &c. iisque distinguendis apponuntur virgulæ, integris autem cyphra o. Sic fractio decimalis, $\overset{0}{5}.\ \overset{\mathrm{I}}{8}\ \overset{\mathrm{II}}{6}\ \overset{\mathrm{III}}{4}\ \overset{\mathrm{IV}}{2}$ signifi-

gnificat quinque integra, octo primas, sex secundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed satis est virgulam ultimam apponere, & integra puncto distinguere, ut $5.864\overset{IV}{2}$. Quæ quidem fractio idem valet ac $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$, seu $\frac{58642}{10000}$, At commodi gratia decimales scribuntur instar integrorum, omisso denominatore, modo supra explicato, nempe $5.864\overset{IV}{2}$.

Coroll. I. Hinc sequitur virgulas illas, sive apices decimales, qui numeris apponuntur, esse loco denominatorum; ut in decimali $5.\overset{I}{8}\,\overset{II}{6}\,\overset{III}{4}$, apex unus importat denominatorem 10, duo apices denominatorem 100, tres denominatorem 1000 &c. hoc est $\frac{8}{10}\ \frac{6}{100}\ \frac{4}{1000}$.

Corol. II. Itaque decimales ad eandem denominationem facile reducuntur, addendo tot zeros virgulis decimalibus affectos, quot opus fuerit; ut si decimalis $3.\overset{I}{5}$ reducenda sit ad secundas, ad tertias, vel quartas &c. scribitur $3.5\overset{II}{0}$, $3.50\overset{III}{0}$, $3.500\overset{IV}{0}$. Valor enim non mutatur, nam $\overset{I}{5} = 5\overset{II}{0}$, $\overset{II}{5} = 5\overset{III}{0}$ &c. ut julii quinque sunt asses 50.

Coroll. III. Si integro cyphræ quotcunque cum vir-

virgulis addantur, ejus valor idem manet; ut si ad 3 addas $\overset{III}{000}$, ut fiat $3.\overset{III}{000}$, non mutatur integri valor. Significat enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates 3000; nam $\frac{3000}{1000} = 3$.

Schol. *Ubi nullum præcedit integrum, ut in decimalibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{725}{1000}$ *tunc loco integri ponitur zero, nempe* 0.8, 0.24, 0.725, *quæ æquivalent præcedentibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$ *&c.*

DEFINITIO II.

FRactionum decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis, seu gradus, quarum iidem sunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0.5679, & 0.045, notæ *6* & 4, item 7 & 5 dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet $\frac{6}{100}$ & $\frac{4}{100}$, item $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$. Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Coroll.* 1.

DEFINITIO III.

PRogressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes millesimæ, sed partes decimæ, aut centesimæ nullæ sunt; ut $4.\overset{I}{2}\,\overset{IV}{5}$, ubi partes centesimæ, & millesimæ desunt, quæ quidem cyphris interpositis supplentur: sic eadem decimalis, interpositis duabus cyphris, erit $4.200\overset{IV}{5}$. Simi-

Similiter $3.\overset{II}{5}\overset{V}{7}$, fiet $3.0500\overset{V}{7}$. Eadem ratione $\frac{5}{1000}$ scribitur $0.00\overset{III}{5}$, & $3 + \frac{45}{1000}$ scribitur $3.004\overset{IV}{5}$. Semper enim valor est idem, ut in *Coroll.* 2. & 3. fuit explicatum.

PROPOSITIO I.

Decimales addere, & subtrahere.

FRactiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo respondeant *per Defin.* 2.; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua *per Defin.* 3.: deinde additio, & subtractio fiat, ut in *Propos.* 2. & 4. *Cap.* 1.

Additionis exempla.

A	$3.24\overset{III}{5}$	$5.\overset{I}{2}\overset{III}{7} = 5.20\overset{III}{7}$	
B	$7.3\overset{II}{9}$	$6.\overset{I}{4}\overset{II}{5} = 6.4\overset{II}{5}$	
C	$10.63\overset{III}{5}$	Summa $11.65\overset{III}{7}$	

Ratio horum patet ex dictis: nam si decimales *A* & *B* fiant ejusdem denominationis *per Corol.* 2. erunt *per Cor.* 1. $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$.

 proin-

proinde $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000}$ $= C\ 10.63\overset{III}{5}$ *per Defin.* 1.

Subtractionis exempla.

A	$4.5\overset{II}{7}\overset{III}{2}$	$7.\overset{I}{4}\overset{III}{2} = 7.40\overset{III}{2}$	
B	$1.2\overset{II}{9}$	$\overset{II}{3}\overset{III}{5} = 0.03\overset{III}{5}$	
C	$3.28\overset{III}{2}$	*differentia* $7.36\overset{III}{7}$	

Ratio plane est eadem ac additionis : nam si decimales *A* & *B* ad eandem denominationem reducantur *per Cor.* 2. erunt *per Cor.* 1. $A = \frac{4572}{1000}$, & $B = \frac{1290}{1000}$ hinc $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1290}{1000}$ $= \frac{3282}{1000} = C.\ 3.28\overset{III}{2}$ *per Defin.* 1.

Schol. *Ut ex integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimales subtrahendæ. Sic ad subtrahendum ex* 8 *integris tres centesimas, hoc est* $0.0\overset{II}{3}$, *adduntur ad* 8 *duo zeri, ut fiat* $8.0\overset{II}{0}$, *eritque residuum* $7.9\overset{II}{7}$, *ut patet.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

Fractiones decimales multiplicantur ut integra *per Prop.* 5. *Cap.* 1., nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera sinistram versus.

Exempla.

I.	II.	III.
$4.0\overset{II}{5}$	$0.74\overset{III}{5}$	$0.00035\overset{VI}{6}$
$3.\overset{I}{2}$	$4\overset{II}{2}$	$0.004\overset{IV}{8}$
810	1490	2848
1215	2980	1424
$12.96\overset{III}{0}$	$0.3129\overset{V}{0}$	$0.0000001708\overset{X}{8}$

Operandi modus ex dictis facile demonstratur. Nam in primo exemplo $4.0\overset{II}{5} = \frac{405}{100}$ & $3.\overset{I}{2} = \frac{32}{10}$ *per Defin.* 1. Est autem *per Propos.* 10. *Chp.* 3. $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000} = 12.96\overset{III}{0}$ *per*

per Defin. 1. *&* *Coroll.* 1. quod eſt ejuſdem exempli primi productum.

Ex eodem primo exemplo manifeſtum eſt, tres tantum notas decimales in facto abſcindi, quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad ſiniſtram zeri, quot deſunt in facto notæ decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.

Schol. I. *Quod ſi in alterutro factore progreſſio decimalis ſit interrupta; ut ſi multiplicari oporteat* $\overset{\text{I}}{4}\ \overset{\text{III}}{5}$ *per* $3.\overset{\text{II}}{2}$, *primo progreſſio interpoſitis zeris fiat integra* per Defin. 3., *hoc eſt fiat* $\overset{\text{I}}{4}\overset{\text{III}}{5} = 40\overset{\text{III}}{5}$, *&* $3.\overset{\text{II}}{2} = 3.0\overset{\text{II}}{2}$, *deinde multiplicando* $40\overset{\text{III}}{5} \times 3.0\overset{\text{II}}{2}$ *habetur productum* $1.2231\overset{\text{V}}{0}$.

Schol. II. *Si factorum unus ſit numerus integer ſine ullo decimali, in producto numerantur tot notæ, quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorſus. Sic* $3 \times 4.2\overset{\text{II}}{5} = 12.7\overset{\text{II}}{5}$.

PROPOSITIO III.

Decimales dividere.

Fiat diviſio, ut in integris fieri ſolet *per Propoſ. 6. Cap.* 1.; utque notæ decimales in quoto diſtinguantur, ſubtrahe numerum apicum, quos habet

habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cyphræ, ut in tertio exemplo.

Exempla.

I. $\overset{II}{3}$) $0.135\overset{V}{6}3$ | $4.52\overset{III}{1}$

II. $5.2\overset{II}{4}$) $18.8\overset{III}{6}4$ | $3.\overset{I}{6}$

3144
—00

III. $27.5\overset{III}{8}9$) $0.\overset{III}{3}54\ldots\ldots$ | $0.0128\overset{V}{3}$

27589

—78110
55178

229320
220712

—86080
82767

3313 &c.

Operandi ratio clara est. Nam in primo exemplo *per Defin.* 1. habetur $\overset{II}{3} = \frac{3}{100}$ & 0.

$\overset{v}{0.13563} = \frac{13563}{100000}$, proinde dividendo numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem ac si essent numeri integri, habetur nova fractio $\frac{4521}{1000} = \overset{iii}{4.521}$ *per Defin.* 1. nempe quotus in primo exemplo inventus.

Schol. *Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra per* Defin. 3. *deinde instituatur divisio, ut supra dictum est.*

PROPOSITIO IV.

Integrum, vel fractum in partes decimales reducere.

I. Esto reducendus in partes v.g. decimas numerus *6*. Ducatur *6* in 10, & producto subscribatur denominator 10, erit $\frac{60}{10}$, seu $\overset{i}{60}$ *per Defin.* 1. Similiter 28 ad centesimas reductus erit $\frac{2800}{100}$, seu $\overset{ii}{28.00}$.

II. Reducenda sit fractio ex. gr. $\frac{3}{5}$ in partes millesimas, ducatur numerator 3 in 1000, & productum dividatur per denominatorem 5, erit $\frac{3000}{5} = 600$, unde apparet $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = \overset{iii}{0.600}$ *per Defin. cit.*

Simi-

Similiter fractio $\frac{3}{7}$ reducenda sit in partes centesimas millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, & invenietur $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed > 0.42857, defectu existente minori quam $\frac{1}{100000}$. Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

Schol. *Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsitæ. Ratio autem operationis habetur ex regula proportionum, de qua inferius. Nam in secundo exemplo est* 5. 3 :: 1000. 600, *& sic de aliis.*

PROPOSITIO V.

Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.

QUæritur quot uncias unius pedis Romani conficiant particulæ decimales $\overset{\text{III}}{750}$. Quia pes Romanus dividitur in uncias 12, hinc patet, particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem *per Defin.* 1. particulæ $\overset{\text{III}}{750} = \frac{750}{1000}$. Ducantur igitur particulæ decimales

les 750 in 12, & productum dividatur per 1000, erit $\frac{9000}{1000} = 9$; habentur ergo $\frac{9}{12}$, proinde $75\overset{\text{iii}}{0} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Igitur particulæ datæ conficiunt novem uncias, ſeu $\frac{3}{4}$ unius pedis Romani.

Similiter ſcire volo, quot aſſes, ſeu quot partes ſcuti Romani, quod in aſſes 100 dividitur, contineant decimales particulæ $561\overset{\text{iv}}{0}$. Cum *per Defin.* 1. ſint $561\overset{\text{iv}}{0} = \frac{5610}{10000}$, ſi ducantur 5610 in 100, & productum dividatur per 10000, erit $\frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1}{10}$. Continent ergo aſſes $56 + \frac{1}{10}$, hoc eſt aſſes 56, & unius quadrantis Romani ſemiſſem. Ratio innititur regulæ proportionum, de qua inferius.

Schol. I. *Simon Stevinus, decimalium auctor ingenioſiſſimus, eas loco fractionum vulgarium adhibendas propoſuit, ſummo quidem calculi commodo, cùm decimales tractentur ſine moleſtia, non ſecus ac integri eſſent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici Tacquetus, Præſtetus, Reyneau, Wolfius, & alii hoc præclarum inventum illuſtrarunt, additis quoque demonſtrationibus, quæ in auctore deſiderabantur.*

Schol. II. *Ceterum fractiones decimales in omni fere Matheſi magni ſunt uſus, maxime vero in approximatione radicum in Algebra. Proinde Analyticis noſtris Inſtitutionibus hæc ipſa de calculo Decimali notitia fuit tanquam appendix adjecta.*

CA-

CAPUT V.

De extractione Radicum.

SI numerus quicunque ducatur in se ipsum, ut 3 X 3 producitur 9, qui dicitur numerus quadratus, propter analogiam, quam dicit ad quadratum Geometricum. Item si ducas 4 X 4 oritur 16 pariter quadratus. Illi vero numeri 3 & 4, ex quibus in se ductis planum illud, seu quadratum oritur, dicuntur *latus* quadrati, seu *radix*, & exprimuntur hoc signo √, quod signum *radicale* vocant.

Si radix 3 multiplicet quadratum 9, vel 4 multiplicet 16, tunc producitur 27, vel 64, qui dicuntur *cubi*; quia repræsentant corpus æqualiter longum, latum, & profundum, quod à Geometris denominatur *cubus*, & numeri illi 3 & 4, dicuntur *radix*, seu *latus* cuborum 27, & 64.

Quod si cubus ipse per suam radicem multiplicetur, ut 27 X 3, oritur *quadrato-quadratus* 81. Si iterum 81 X 3, oritur *quadrato-cubus*, & sic deinceps. Hæc producta recentiores Mathematici vocant *dignitates*, seu *potestates*; nempe vocant radicem dignitatem, seu potestatem *primam*: quadratum *secundam*, cubum *tertiam*, quadrato-quadratum *quartam*, quadrato-cubum *quintam* &c. quas etiam literis sic exprimunt, a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 &c.

DEFINITIO.

Extractio igitur radicis quadratæ, vel cubicæ &c. (seu secundæ, tertiæ, vel quartæ potestatis &c.) est inventio illius numeri, qui semel, bis, ter, vel pluries in se ductus illam potestatem genuit, adeoque ab ipsa potestate denominatur radix secunda, tertia, quarta &c.

Si numerus datus centenarium non excedit, & sit quadratus, ejus radix habetur ex tabella, quæ sequitur; ut si quæratur radix quadrati 64, ejus radix invenitur 8. Quod si numerus non sit quadratus, ut ex. gr. 50, sumenda est ex eadem tabella radix proxime minor, hoc est 7, quæ in se ducta producit 49, quadratum maximum contentum in dato numero 50.

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Schol. I. *Nota, quadratum majus superare quadratum proxime minus duplo radicis quadrati minoris plus unitate. Sic* 16 *majus est quadrato* 9 *duplo radicis* 3 + 1, *hoc est* 7. *Item* 36 *superat* 25 *duplo radicis* 5 + 1, *nempe* 11.

Schol. II. *Similiter cubus major ex. gr.* 64 *superat cubum proxime minorem* 27 *triplo radicis cubi minoris ducto in radicem majoris cubi plus unitate; nempe* $9 \times 4 + 1 = 37$, *& sic de aliis.*

PRO-

PROPOSITIO I.

Ex dato numero radicem quadratam, seu secundam extrahere.

SIt numerus *A*, ex quo radix secunda extrahenda sit.

```
        A   1 8 6 6 2 4   ( B
            1 6             432
           ---------
  C  83)  — 2 6 6
            2 4 9
           ---------
  D 862)  — 1 7 2 4
            1 7 2 4
           ---------
            0 0 0 0
```

1. Sub ultima figura ad dexteram notetur punctum, deinde sub antepenultima, & sic deinceps, ut totus numerus distribuatur in membra (ut hic tria) quæ continebunt binas figuras, excepto ultimo ad sinistram, si numerus figurarum sit impar, quod unam habebit. Quot erunt membra, tot figuris radix quæsita constabit.

2. Quære ex tabula superiori radicem primi membri ad sinistram, nempe 18, hoc est radicem proxime minorem, scilicet 4, quam pone dextrorsum post lineam, ut in *B*.

3. Duc radicem 4 in se ipsam, & quadratum

16 pone sub ipso membro 18, ex quo subtrahatur; tum residuo 2 (quod notatur infra lineam) adde sequentes duas figuras *66*, quæ simul faciunt *266*.

4. Radicem ipsam 4 duplica, fit 8, quem pone in *C* pro divisore numeri *26* (excluditur enim semper a divisione figura notata puncto) & quotum inventum 3 appone tum radici in *B*, tum divisori in *C*, unde fit 83.

5. Per radicem modo inventam 3 multiplica omnes numeros in *C* positos, & productum 249 subscribe numero *266*; a quo facta subtractione, remanent 17.

6. Adde huic residuo sequentes duas figuras 24, fient 1724; eandemque operationem rursus institue: nimirum duplica totam radicem *B*, habebis *86*, quem pone in *D* pro divisore numeri 172 (exclusa figura ultima) quotus erit 2, quem appone tum radici in *B*, tum divisori in *D*, & per ipsam radicem 2 multiplica numeros omnes in *D* 8*6*2. Deinde productum 1724 subscribe ipsi numero 1724, a quo debet subtrahi; cumque nihil remaneat, signum est, datum numerum esse vere quadratum.

Sit aliud exemplum. Extrahenda est radix quadrata ex dato numero *M 6015625*.

1. Dividatur in membra per puncta, incipiendo dextrorsum modo jam explicato. Sunt quatuor membra, quorum primum ad sinistram continet unam figuram nempe *6*. Hujus radix proxime minor est 2, quam pone in *N* dextrorsus, ejusque quadratum subtrahe ex primo membro *6*, remanent

manent 2; quibus adde duas figuras sequentis membri, nempe 01, fiunt 201.

M	6 0 1 5 6 2 5	N
	4	2452
R 44)	2 0 1	
	1 7 6	
Q 485)	— 2 5 5 6	
	2 4 2 5	
S 4902)	— 1 3 1 2 5	
	9 8 0 4	
	3 3 2 1	

2. Duplica radicem 2, & per ejus duplum 4, quod pone sinistrorsum in *R*, divide 201 (relicta semper ultima figura notata puncto) quotus est 5, qui reponi deberet tum in *N*, tum in *R*, & per ipsum multiplicari numeri in *R*, nempe 45, sed quia 45 X 5 producit 225, quod subtrahi nequit ex numero 201, ut patet, proinde quotus 5 minuitur unitate, & ponitur tam in *N*, quam in *R* quotus 4, qui ductus in 44 producit 176, quod subtractum ex 201 relinquit 25.

3. Adde huic residuo duas sequentes figuras 56, efficiuntur 2556. Repetenda est eadem operatio toties, quot restant membra in dato numero. Nimirum duplicanda est radix 24, & per ejus duplum.

plum 48, quod ponitur sinistrorsum in *Q*, dividenda sunt 255 (relicta ultima figura) quotus 5 est nova radicis figura, quæ ponitur in *N*, tum etiam in *Q*, & per ipsam multiplicando omnes figuras in *Q* existentes, habetur productum 2425 subtrahendum ex 2556, factaque subtractione, habetur residuum 131. Cui adde ultimas duas figuras 25, & operare ut supra, invenies ultimam radicis figuram 2, quam pone in *N* & *S*, ac cetera prosequere, ut sæpius dictum est.

Est igitur radix quæsita *N* 2452, & remanent 3321, adeoque numerus datus non est revera quadratus.

Corol. Hinc patet, radicem inventam per divisionem unitate esse minuendam, si productum, quod fit ex multiplicatione, majus sit numero, a quo subtrahi debet; ut in secunda figura radicis inventæ factum est: quod quidem notetur.

Schol. I. *Quando divisor non continetur in aliquo membro dividendo, apponitur in radice cyphra, seu zero, ut si extrahenda sit radix quadrata ex 3714. Quia sublato ex primo membro 37 quadrato 36 radicis inventæ 6, remanet 1, cui si addatur sequens figura 1 fit 11, (nam figura puncto notata excluditur a dividendo ex dictis) qui numerus dividi nequit per duplum radicis 6, nempe 12; in hoc casu ponitur in radice cyphra 0, eritque radix 60, & habetur residuum 114, cui adduntur statim (si sint) aliæ duæ figuræ dati numeri.*

Schol. II. *Si numerus datus non est quadratus, sed remanet residuum, ut in allato exemplo residuum*

duum 114; *tunc fit ex residuo fractio, in qua residuum ipsum ponitur pro numeratore, pro denominatore autem duplum radicis inventæ. Si vero residuum sit majus ipsa radice, tunc duplo radicis inventæ additur unitas. Sic in eodem exemplo, quia residuum* 114 *majus est tota radice* 60, *addita unitate ad duplum ipsius radicis, erit fractio* $\frac{114}{121}$, *ac tota radix* $60 + \frac{114}{121}$ ex Sch. 1. pag. 74.

Schol. III. *Nullus numerus erit quadratus, qui habeat ad dexteram figuram ultimam* 2, *vel* 3, *vel* 7, *vel* 8, *vel cyphram unam; sed necesse est, ut sit una ex his* 1, 4, 5, 6, 9, 00, *quibus constant numeri simplices quadrati.*

Schol. VI. *Extractio radicis quadratæ non est aliud nisi quædam divisionis species, ut ex ipsa operatione manifestum est; hoc tamen discrimine, quod in divisione communi divisor est numerus datus, in hac vero debet inquiri divisor, & quidem per plures partes, quæ sunt ipsa radix. Proinde multiplicando radicem per se ipsam, v. g. in primo exemplo* 432 X 432, *restituitur numerus quadratus* 186624, *ut fieri solet in divisione communi, ducendo quotum per divisorem. Et hac ratione habetur examen, multiplicando scilicet per se ipsum radicem inventam, & addendo residuum, si forte sit,*

Demonstr. pendet a *Prop.* 4. *lib.* 2. *Eucl.* Nam numerus quadratus 186624, qui producitur ex 432 X 432, continet primo quadrata partium 4,3,2. Secundo, bis rectangulum 4 X 3. Tertio, bis rectangulum ex 43 X 2, seu rectangulum ex duplo ipsius 43, nempe 86 X 2; quod patet ad oculum, nempe:

16....

```
 1 6 . . . .
   1 2 . . .
   1 2,9 . .
       8 6.
       8 6,4
 ------------
 1 8 6 6 2 4
```

Ex ſpecioſa tamen id longe clarius apparet, ſi loco numerorum 4, 3, 2, ſumantur literæ $a + b + c$; ut in noſtris *Inſtit. Analyt.*

PROPOSITIO II.

Radicem quadratam per approximationem inquirere.

EXtracta radice quadrata, ſi quid remanet, ſignum eſt, talem numerum non eſſe revera quadratum, neque habere radicem rationalem, quæ numeris exprimi poſſit. Quanvis autem vera radix ſit impoſſibilis, poteſt tamen per fractiones decimales ad veram radicem magis magiſque approximari, ita ut exceſſus, vel defectus a vera radice ſit minimus. En praxis.

Adde numero, qui remanet poſt extractionem radicis, vel numero ipſi, a quo extracta fuit radix, tot cyphrarum paria, quot volueris, nempe oo, ſeu oooo, oooooo &c. & ex numero reſiduo una cum prædictis cyphris extrahe radicem ſecun-

secundam, ut moris est. Aufer deinde ex radice tot figuras (a dextera incipiendo) quot fuerunt paria cyphrarum additarum. Reliquæ figuræ radicis exhibebunt radicem una cum minutia, cujus numerator erunt figuræ ablatæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot paria fuerunt addita.

Sit exemplum. Extrahenda est radix ex numero 12, patet radicem esse 3, & remanere 3. Adde ipsi 12 tria cyphrarum paria, erit 12000000. Extracta ex hoc numero secunda radice *per Prop. 1. hujus* invenitur 3464, ex qua ablatis ad dexteram tribus figuris, ob tria cyphrarum paria addita, erit radix $3 \frac{464}{1000}$ vera quidem minor, sed propinquior, & exactior, quam radix primo inventa.

Schol. I. *Si numero, ex quo radix secunda extrahitur, minutia adhæreat, reducitur minutia in partes centesimas, & extrahitur radix. Extrahenda sit radix ex 6* $\frac{1}{4}$, *reduc fractionem in centesimas* per Prop. 4. Cap. 3. *erit fractio* $\frac{25}{100}$, *cui adde 6, fit* $\frac{625}{100}$, *cujus radix quadrata erit* $2 \frac{5}{10}$.

Schol. II. *Quod si denominator minutiæ, quæ integro adhæret, sit numerus quadratus, poterit numerus integer ad unam cum ipso minutiam reduci, & inde extrahi radix. Sic in superiori exemplo 6* $\frac{1}{4}$ *fiet* $\frac{25}{4}$, *extractaque seorsim tum ex denominatore, tum ex numeratore radice, habetur* $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, *ut antea. Unde patet modus extrahendi radicem quadratam ex meris fractionibus, quæ numeris quadratis constant.*

Schol. III. *Si vero denominator fractionis, ex qua radix erui debet, non sit numerus quadratus, ut si data sit fractio* $\frac{4}{7}$; *tunc multiplicato numeratore per denominatorem, extrahitur ex facto radix, cui supponitur ipsemet denominator. Erit igitur datæ fractionis radix* $\frac{5}{7}$. *Ratio est, quia* $\frac{4}{7} \times 7 = \frac{28}{49}$ per Ax. 3. Cap. 3. *Æqualium autem fractionum æqualis est radix, proinde* $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{5}{7}$.

Schol. IV. *Fractio non quadrata fieri potest quadrata per divisionem, vel multiplicationem. Sic* $\frac{12}{27}$ *divisa per 3 fit* $\frac{4}{9}$ per Ax. 3. *Similiter* $\frac{2}{8} \times 2$ *fit* $\frac{4}{16}$ per idem Ax. *Ex quibus habetur radix quadrata, ut patet. Ceterum tam pro integris, quam pro fractis radix maxime propinqua haberi potest per Logarithmos, de quibus inferius.*

PROPOSITIO III.

Ex dato numero radicem cubicam extrahere.

1. Divide numerum datum *A* in membra, incipiendo dextrorsum, ita ut singula membra contineant tres figuras, excepto primo membro, quod aliquando duas, vel unam tantum continet. Quot erunt membra, tot erunt numeri radicis inveniendæ.

2. Quære radicem cubicam primi membri sinistrorsum, si sit numerus cubicus; sin minus, sume radicem cubi proxime minoris in tabella superius posita, quæ in hoc exemplo est 2, quam pone ad dexteram, ut in *B*. 3. Ex

3. Ex hac radice fiat cubus 8, quem ſubtrahe ex primo membro 12, & reſiduum 4 ſcribe infra lineam, ut in *C*.

4. Ad hunc reſiduum adde unam ſequentis membri figuram, nempe 1, fit 41, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ, nempe per 12, quotus 3 erit altera radicis figura, quam pone in *B*.

5. Ex radice 23 fac cubum 12167, qui ſubtrahi debet ex utroque membro numeri *A*. Cumque nihil remaneat, ſignum eſt, numerum datum eſſe revera cubum.

A 12,167 (*B*
8 (23

12) *C* 41

Hæc operatio toties repeti debet, quot ſunt membra numeri dati, ut in ſequenti exemplo erit manifeſtum.

Sit aliud exemplum. Eſto numerus *M* 11390625, cujus radix cubica quæritur.

1. Radix cubica primi membri 11 eſt 2, quam pone in *N*, ejuſque cubum 8 ſubtrahe ex 11, remanet 3, quem ſcribe infra lineam in *R*.

2. Adde reſiduo *R* ſequentem alterius membri figuram 3, fit 33, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ 2, hoc eſt per 12, quotus 2 erit ſecunda figura radicis, quam pone in *N*.

3. Ex radice 22 fiat cubus 10648, qui auferatur ex numero *S* 11390, nempe ex duobus

 mem-

membris numeri dati *M*, remanent 742, ut in *T*.

4. Ad hoc residuum *T* addatur ex tertio membro numeri *M* figura 6, fiet 7426, qui divisus per triplum quadrati radicis inventæ 22, hoc est per 1452, dat quotum 5, qui ponatur in *N*, eritque tertia radicis figura.

5. Demum fiat cubus ex tota radice 225, nempe 11390625, qui ablatus ex numero *M* nihil relinquit, proinde numerus datus est cubus.

```
      M 11,390,625  ( N
         8           ( 225
        ───
  12) R 33
      S 11390
        10648
      ───────
1452) T—742,6
```

Ratio autem pendet ab ipsa cuborum genesi; Nam in priori exemplo cubus 12167, qui oritur ex radice 23, continet primo cubos 8 & 27, partium 2 & 3. Secundo triplum quadrati radicis 2 X 3. Tertio triplum quadrati radicis 3 X 2, hoc est

```
8 . . .
3 6 . .
  5 4 .
    2 7
───────
1 2 1 6 7
```

Coroll.

Coroll. Hæc praxis omnium facillima, traditur a Nevvtono in *Arithmet. Univ.*, & tribus pauciſſimis continetur. 1. Ad reſiduum, quod oritur ex ſubtractione cubi ex unoquoque numeri dati membro, additur una tantum ſequentis membri figura. 2. Diviſo illo reſiduo una cum figura adjecta per triplum quadrati inventæ radicis, quotus dat alterius membri radicem. 3. Ex numeris radicalibus (quotquot illi ſint) fit cubus, qui ſubtrahitur ex totidem membris numeri dati, quot ſunt ipſi numeri radicales inventi. Quæ quidem ex allatis exemplis ſatis patent.

Schol. I. *Cum aliquid remanet, ſignum eſt, numerum datum non eſſe exacte cubicum, ac proinde radicem inventam non eſſe numeri dati, ſed maximi cubi in eo contenti. Reſiduum exprimitur per fractionem hoc pacto: reſiduum ipſum ponitur ſupra lineam loco numeratoris; pro denominatore autem ſumitur differentia inter cubum datum, & cubum proxime majorem minus unitate. Sit exemplum, extracta radice cubica ex numero 46, habetur radix 3, & reſiduum 19, quod erit fractionis numerator; differentia autem inter cubum 27 ex radice 3, & cubum proxime majorem 64 ex radice 4, eſt 36 + 1* per Schol. 2. ad Defin. *Auferatur unitas, remanent 36 pro denominatore fractionis. Eſt ergo radix cubica numeri dati* $3 + \frac{19}{36}$.

Schol. II. *Si quis propinquiorem radicem, & quæ a vera inſenſibiliter differat, cupit, addat aliquot cyphrarum ternarios ad ipſum numerum datum, & proſequatur radicis extractionem. De-*

inde

inde ex radice inventa abjiciantur ad dexteram tot figuræ, quot cyphrarum ternarii fuerunt adjecti; reliquæ enim figuræ dabunt radicem integram cum fractione, cujus numerator erunt ipsæ figuræ rejectæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot ternarii cyphrarum fuerunt additi, eo fere modo, quo de radice quadrata diximus.

Schol. III. *Ceterum tam cubica, quam aliæ superiorum potestatum radices, longe facilius per Algebram expediuntur, maxime per formulas Nevvtonianas, quæ generales sunt, & ad omnem radicem extrahendam valde faciles, & expeditæ. Proinde hunc fontem adeant, qui rem funditus percipere cupiunt.*

Examen habetur ter ducendo in semet radicem cubicam inventam, & addendo illi residuum, si quod fuit. Restituitur enim cubus, seu numerus datus, si erratum non sit.

PROPOSITIO IV.

Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.

Ex dictis satis patet ratio extrahendi radices ex fractionibus communibus. Pro Decimalibus autem peculiaris est regula.

I. Si extrahenda sit radix quadrata, observetur, an decimalis dati apex maximus sit par, ut in *A*; tunc enim extrahitur radix omnino, ut ex integris *per Prop. 1. hujus*; & prima radicis nota afficitur apicis maximi dimidio, ut in *B*.

Si

Si vero apex maximus fit impar, ut in *C*, adjecta typhra, fiat par, ut in *D*, extractaque radice, ut fupra, habetur radix quæfita, ut in *E*.

$\overset{II}{}\;\overset{I}{}$ *A* 23.04 (48 *B*	*C* $22.5\overset{III}{0}0$
	D $22.500\overset{IV}{0}$ ($\overset{II}{1.50}$ *E*

Patet ratio, cur prima radicis nota affici debeat dimidio apicis maximi decimalium. Nam fi fit quadratum unitas cum cyphris 2, 4, 6 &c. ut 100, 10000, 1000000 &c. unitas ipfa cum dimidio ejufmodi cyphrarum erit radix quadrata, nempe 10, 100, 1000 &c. Cum igitur apices ftent loco denominatorum *per Coroll.* 1. *Cap.* 4. conftat propofitum.

II. In extractione autem radicis cubicæ, obfervetur, an apex maximus decimalium trifecari poffit, ut contingit in *M*; tunc enim extrahitur radix cubica, ut ex integris *per Prop.* 3. *hujus*, & prima radicis nota afficitur apicis maximi triente, ut in *N*.

Si vero maximus apex trifecari nequeat, ut vides in *R*; adjice unam, vel duas cyphras, ut trifecari poffit, ut in *S*; tum extrahe radicem cubicam *T*, ut fupra.

M $1.72\overset{III}{8}$ ($1.\overset{I}{2}$. *N*	*R* $26.214\overset{IV}{4}$
	S $26.21440\overset{VI}{0}$ ($0.6\overset{II}{4}$ *T*

Demon.

Demonstr. similis est præcedenti. Nam si fiat cubus ex unitate cum aliquot cyphrarum ternariis, ut 1000, 1000000 &c. unitas ipsa cum cyphrarum triente erit radix cubica, nempe 10, 100 &c. proinde prima radicis cubicæ nota afficitur triente maximi apicis, cum apices sint loco denominatorum, ut dictum est *per Coroll. supra citatum*.

PROPOSITIO V.

Quæstiones aliquot resolvuntur per radicis quadratæ, vel cubicæ extractionem.

1. DUx exercitus habet strenuos milites 1326, quos omnes in acie quadrata ad prælium ordinare vult, quæritur, quot milites in fronte, seu latere stabunt, & quot futuri sint ejus agminis ordines.

Ex dato numero 1326 extrahatur radix quadrata *per Prop.* 1. *hujus*, quæ erit 36 cum residuo 30. Constabunt igitur singuli ordines militibus 36, eruntque ordines pariter 36. Remanent autem milites 30. Proinde ut ipsi quoque in acie disponantur, augeri debet quadrati latus unitate, ita ut singuli ordines habeant milites 37. Itaque duplicetur radix 36, fit 72, additaque unitate habetur 73, numerus scilicet militum addendorum ad quadratum lateris 36. Sed 30 jam supererant, ergo 43 tantum erunt addendi ad numerum 1326, ut fiat 1369, numerus quadratus, cujus radix 37. Hoc patet *ex Schol.* 1. *hujus*.

2. Est

2. Est turris alta pedes 100, quæ in ambitu habet fossam latitudinis pedum 40, fabricanda est scala, quæ ab ulteriore ripa pertingat ad cacumen turris, quæritur ejus longitudo.

Fiant quadrata numerorum 100, & 40, quæ simul addantur, fit summa 11600. Hinc extrahe radicem quadratam, erit scalæ fabricandæ longitudo pedum $107 + \frac{151}{215}$ *per Prop.* 1. *&* *Schol.* 2. *ejusdem*.

3. Volo fieri circulum duplum, triplum, quadruplum &c. alterius circuli dati, seu cujus nota est diameter in aliqua mensura.

Sit diameter circuli dati pollicum *6*, lin. 5, & quæratur circulus ejus duplus. Reducantur pollices ad lineas, eos multiplicando per 12, & addendo producto lineas 5, fient lineæ 77, quarum duplum est 154, qui numeri inter se multiplicentur, & ex producto 11858 eruatur radix quadrata, quæ invenitur $108 + \frac{97}{108}$ *per Propos.* 1. Circuli ergo dupli diameter erit linearum $108 + \frac{97}{108}$, hoc est pollicum $9 + \frac{97}{108}$ unius lineæ.

Schol. *Quod de circulo dictum est, extenditur quoque ad quodlibet Polygonum regulare, nempe Quadratum, Pentagonum, Exagonum &c. si eorum duplum, triplum, quadruplum inveniri oporteat, dato uno ipsorum latere. Sed hæc ad Geometriam pertinent*, & a Prop. 20. l. 6. Eucl. *derivantur*.

4. Fabricanda est cisterna cubica, quæ contineat aquæ pedes cubicos 68921, quæritur quanta futura sit ejus latitudo, longitudo, ac profundum.

M Ex

Ex numero 68921 extrahatur radix cubica, quæ *per Propos.* 3. *bujus* dat pedes 41, unde innotescunt omnes ipsius cisternæ dimensiones.

5. Data diametro globi ferrei, lapidei, vel plumbei, qui libram unam ponderat, quæritur diameter pro globo ejusdem meteriæ librarum 2, 3, 4, 5 &c.

Diameter data intelligatur divisa in partes 100, erit ejus cubus 1000000. Tum ex ejusdem cubi duplo, triplo, quadruplo &c. nempe 2000000, 3000000, 4000000 &c. radix cubica extracta per *Propos. cit.* dabit diametrum quæsitam globi librarum 2, 3, 4 &c. Seu, cubus diametri datæ ducatur in pondus, seu in numerum librarum globi, cujus diameter quæritur, & extrahatur ex producto radix. Invenienda sit diameter globi plumbei librarum 8; cubus $1000000 \times 8 = 8000000$, cujus radix cubica 2000 dat diametrum quæsitam. Hæc est *regula calibræ*, cujus ope ex data diametro globi unius libræ diametri reliquorum globorum ejusdem materiæ determinantur; & hinc quoque innotescit tormenti bellici cavitas, seu diameter.

6. Depopulante sævissima lue Athenas, consultus fuit Apollo Delius, quo pacto illa cessaret; respondit, pestem cessaturam, si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Hinc ortum est celebratissimum de duplicatione cubi problema.

Fuerit igitur ejus cubi latus palmorum 12, cujus duplum 24. Fiat ex 12 quadratum, quod multiplicetur per 24, erit $12 \times 12 = 144 \times 24 = 3456$. Extrahatur hinc radix cubica, quæ dat pal-

palmos 15 $+ \frac{81}{720}$ ($= \frac{9}{80}$) Igitur ara illa cubica fabricari debet ex latere palmorum 15 cum fractionibus, proinde problema erit practice, non autem Geometrice solutum, quod ab oraculo petebatur. Ratio hujus, & præcedentis pendent *ex Prop.* 18. *l.* 12. *Eucl.*, *& Prop.* 12. *Cap.* 6. *sequentis*, quæ hujus loci non sunt. Sed hæc pauca sufficiant ad indicandum usum extractionis radicum, qui in universa fere Methesi in immensum patet.

CAPUT VI.

De Regulis Arithmeticis.

Regulæ Arithmeticæ sunt quatuor. 1. Est regula Proportionum. 2. Societatis. 3. Alligationis. 4. Positionis, vel falsi. Prima est omnium præcipua, & a qua reliquæ omnes pendent. Quo melius ea intelligatur, nonnulla sunt, de numeris proportionalibus, eorumque proprietatibus præmittenda.

DEFINITIONES.

I. *Ratio*, sive *proportio* est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo. Ut si comparetur 12 ad 4, intelligitur 12 continere ter 4, & habere rationem tripli: alter terminus dicitur *antecedens*, alter *consequens*.

II. Duæ rationes dicuntur *similes*, *eadem*, vel *æquales* (quod idem est) cum antecedens unius toties continet suum consequentem, quoties antecedens alterius continet suum consequentem. Vel cum antecedens unius toties continetur in suo consequenti, quoties antecedens alterius continetur in suo consequenti. Sic 12. 4 :: 3. 1. sunt rationes similes, vel eædem, vel æquales, quia 12 & 3 ter continent suos consequentes 4 & 1, & 4. 12 :: 1. 3. dicuntur similes, quia 4 & 1 ter continentur in suis consequentibus 12 & 3.

III. Quatuor illi termini, seu quantitates eandem rationem habentes, ut 12. 4 :: 3. 1. dicuntur *Proportionales*. Et si termini medii bis sumantur, ita ut eadem quantitas semel sit consequens respectu præcedentis, & semel antecedens respectu consequentis, ut 2, 4, 8, in quibus 4 bis sumitur, dicuntur *continue Proportionales*. Si vero nullus terminus bis accipitur, ut 10. 5 :: 2. 1. dicuntur termini *discretim proportionales*.

LEMMATA.

I. SI quatuor numeri proportionales fuerint, factum ex primo, & quarto, æquale est facto ex secundo, & tertio. Est *Propf.* 19. *l.* 7. *Eucl.*

Sint quatuor proportionales 5. 20 :: 4. 16

Sicuti 5 X 16 dant = 80

Ita etiam 20 X 4 dant = 80

II. Si datis quatuor numeris, primus se habeat ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, factum

ctum ex primo, & secundo æquale erit facto ex tertio, & quarto.

Sint quatuor numeri dati 6, 4, 3, 8, quia inter primum 6, & tertium 3 est eadem proportio dupla, quæ est inter 8 & 4, erit 6. 3 :: 8 & 4; ergo *ex lem.* 1. $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$; ergo factum ex primo, & secundo æquatur facto ex tertio, & quarto.

III. Si factum dividatur per unum ex suis factoribus prodibit in quoto alter factorum.

Sit factum v.g. 24, quod ortum sit ex 4×6, si dividatur per 6 oritur 4.

PROPOSITIO I.

De Regula Proportionum.

Regula *Proportionum*, quam ob præstantiam & immensam utilitatem, *auream* vocant, docet modum inveniendi e tribus numeris cognitis quartum ignotum proportionalem, qui nimirum habeat eandem proportionem ad tertium numerum datum, quam secundus habet ad primum; ideoque dicitur regula *Proportionum*, vel etiam regula *Trium*, quia ex tribus datis eruit quartum. En praxis.

I. Disponantur ordine tres numeri dati, ita ut is, qui quæstionem habet annexam, statuatur tertio loco; ille vero ex duobus aliis, qui cum hoc est homogeneus, hoc est qui eandem rem significat ac terminus tertio loco positus, primo loco ponatur.

II. Mul-

II. Multiplica tertium per secundum, & productum divide per primum, quotus dabit quartum proportionalem quæsitum. Res tribus exemplis illustratur.

1. Ulnæ panni 2 stant scutis 9, quot scutis stabunt ulnæ 12 ejusdem panni? terminum qui habet annexam quæstionem, sunt ulnæ 12: hic statuatur loco tertio, loco autem primo terminus huic homogeneus, nempe ulnæ 3, scilicet

Ulnæ 3. *scut.* 9 :: *ulnæ* 12. *scut* ....

Duc 12 X 9, & productum 108 divide per 3, quotus 36 dat quartum proportionalem quæsitum. Nam, ut patet.

3. 9 :: 12. 36

2. Rex Salomon in ædificando templo habuit operarios 180000. Ponamus cuilibet operario quotidie solvisse tantum asses 10. Quot scuta Romana singulis diebus expendit?

Si oper. 1. *asses* 10. *quid oper.* 180000.

Multiplicatis 180000 X 10, producitur 1800000, & cum unitas non dividat, habentur pro quarto proportionali asses 1800000. Hos divide per 100 (resectis duabus cyphris) fiunt scuta Romana singulis diebus solvenda 18000.

3. Fixarum motus ex Ricciolio & Flamsteedio singulis 100 annis procedit gr. 1. 23'. 20'', quot anni

ni requiruntur ad totum cœli ambitum, seu gr. 360 percurrendos? Primo gr. 1. 23'. 20'' reducantur ad minuta secunda per multiplicationem, scilicet 1 X 60 + 23 = 83 X 60 = 4980 + 20 fiunt 5000. Similiter gr. 360 X 60 X 60 fiunt 1296000. Dic jam, si minuta secunda 5000 dant annos 100, quot annos dabunt minuta secunda 1296000? Invenientur per regulam auream anni 25920, qui nimirum annum Platonicum conficient.

5000.100::1296000.25920.

Coroll. Ex hoc exemplo manifestum est, terminos proportionales regulæ aureæ, antequam regula ipsa instituatur, in homogeneos esse reducendos, si forte numeris heterogeneis constent. Sic si dicatur, libræ 5 unc. 3 veneunt scutis 4, & assibus 50, quot scutis stabunt libræ 12? Libræ reducendæ sunt ad uncias in primo & tertio termino, & scuta ad asses, & tres termini proportionales erunt unciæ 63, ass. 450, unc. 144.

Schol. *Cum integris adhærent fracti, prius integri reducuntur ad fractos: integris autem, quibus nulla est fractio, supponitur unitas; deinde regula proportionum fit, ut dictum est. Si dicatur hora* 1 $\frac{1}{4}$ *fluunt ex aliquo canali libræ* 15 *aquæ, quot libræ fluent horis* 2 $\frac{1}{5}$? *Termini proportionales redacti erunt* $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{1}$, $\frac{11}{5}$. *Tum operando juxta præcepta tradita in* Prop. 10. *&* 11. Cap. 3. *invenies aquæ libras* 26 $\frac{2}{5}$.

De-

Demonstr. clare infertur *ex lemm.* 1. & 3. Nam cum in regula proportionum ſupponatur dati tres numeri proportionales, & quartus, qui eſt ignotus, dari poſſit; factum ex ſecundo, & tertio æquale erit (*per lem.* 1.) facto ex primo, & quarto, qui eſt ignotus. Proinde ſi factum ex ſecundo, & tertio dividatur per primum, innoteſcet quartus terminus (*per lem.* 3.); ergo patet ratio, cur ex tradita regula multiplicari debeat tertius per ſecundum terminum, & factum dividi per primum.

Examen regulæ proportionum omnium expeditiſſimum habetur multiplicando primum terminum per quartum, & ſecundum per tertium. Nam ſi producta ſint æqualia, res bene proceſſit. Ratio patet *ex lem.* 1.

PROPOSITIO I.

De regula proportionum Compoſita.

Regula proportionum *Compoſita* dicitur, cum præter tres terminos in *Propoſ. præc.* explicatos, alii quoque minus principales accedunt, qui ſignificant tempus, lucrum, damnum &c. qui cum terminis principalibus per multiplicationem componuntur, ut fiant tres ſolum termini. Exempla rem declarabunt.

1. Juvenes 4. contubernales expenderunt diebus 10. aureos 50; quæritur quot aureos ſolvere debeant juvenes 12 diebus 30? Tres principales termini ſunt juvenes 4, aurei 50, & juvenes 12. Ad juve-

juvenes 4 spectant dies 10, & ad juvenes 12 dies 30. Duc itaque 4 X 10, & 12 X 30, habentur duo termini compositi 40, & 360. Dic ergo

Si 40 *dant aur.* 50, *quid* 360?

Multiplicando 360 X 50, & productum dividendo per 40, ut in *præc. Propos.* factum est, invenitur quartus proportionalis 450.

2. Libræ 200 alicujus mercis transvectæ Romam per milliaria 300 poscunt scuta 40; quæritur expensa pro transvehendis libris 400 ejusdem mercis per milliaria 500? Tres termini principales sunt libræ 200, scuta 40, & libræ 400. Minus principales sunt milliaria 300, & 500; qui si multiplicentur per suos terminos principales, fient tres termini pro regula trium instituenda, nimirum

$$60000 . 40 :: 200000 . 133 \tfrac{1}{3}$$

Schol. I. *Regula proportionum composita est regula simplex proportionum repetita; unde etiam regula* Dupli *dicitur, quia duplicem quæstionem involvit. Proinde resolvi etiam potest in duas regulas simplices, in quarum altera ponuntur tres termini principales dati, & quæritur quartus proportionalis; in altera vero ponuntur circumstantiæ, seu termini minus principales, in quorum medio ponitur quartus proportionalis inventus; Sic in superiori exemplo dic, si libræ* 200 *exigunt scuta* 40, *quid libræ* 400? *Quartus proportionalis est* 80, *ut patet. Dic secundo si mil-*

liaria 300 *dant* 80, *quid milliaria* 500? *Invenitur quartus proportionalis*, *ut supra*, 133 $\frac{1}{3}$.

Schol. II. *Hæc regula dicitur etiam* del Cinque, *quia terminos quinque notos supponit*. *Examen fit ut in* præc. propos.

PROPOSITIO III.

De Regula proportionum Inversa.

In regulis proportionum tum simplici, tum composita jam explicatis, ita se habet primus terminus ad secundum, sicuti tertius ad quartum, ut exempla allata satis monstrant; proinde ex *Propos.* 14. *lib.* 5. *Eucl.* si primus terminus major, vel minor est tertio, etiam secundus major, vel minor esse debet quarto, ut consideranti patet. Solet autem nonnunquam accidere ex ipsa natura quæstionis, ut quanto major, vel minor primus terminus est tertio, tanto major, vel minor reciproce esse debeat terminus quartus secundo. In hoc casu regula proportionum dicitur *inversa*, quia scilicet terminorum ordo invertitur. Hærent hic tyrones primo, non bene dignoscentes, utra regula sit adhibenda. Sed quæ sequuntur exempla, rem satis illustrant.

1. Messores 20 segetem aliquam metunt diebus 4, quæritur quot diebus illam metere possint messores 10? Patet majori tempore, adeo ut quanto major est terminus primus tertio, tanto major quoque debeat esse quartus incognitus secundo. Nam

Mess.

Meſſ. dies Meſſ. dies
20 . 4 :: 10 . 8.

2. In obſeſſa Urbe ali poſſunt milites 1500 menſibus 3, quæritur quot milites ali poterunt menſibus 6? Certe minor numerus. Proinde quanto minor eſt primus terminus tertio, tanto minor quartus erit ſecundo, ſcilicet

Menſ. Mil. Menſ. Mil.
3 . 1500 :: 6 . 750.

3. Ex panno habente latitudinem palmorum 3 requiruntur mihi pro veſtimentis ulnæ 10, quæritur quot ulnæ requirantur ex alio panno, qui latitudinem habet palmorum 4. Certum eſt, pauciores requiri, adeoque quanto minor eſt primus terminus tertio, tanto minor erit quartus ſecundo, nempe

lat. pal. uln. lat. pal. uln.
3 . 10 :: 4 . $7\frac{1}{2}$

Ad inveniendum autem in regula Proportionum inverſa quartum proportionalem, multiplicetur primus terminus per ſecundum, & productum dividatur per tertium. Sic in primo exemplo ductis 20 X 4, productum 80 dividatur per 10, habetur quartus proportionalis 8.

Demonſtr. ſequitur *ex* 2. *&* 3. *lemm.* Nam in regula proportionis inverſa cum ſe habeat primus

terminus ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, erit *ex 1. lemm.* productum ex primo & secundo æquale producto ex tertio & quarto. Producti autem, quod fit ex tertio & quarto, habetur unus ex factoribus datus, numerus scilicet tertio loco positus, ergo si per hunc dividatur productum æquale, quod fit ex primo & secundo, prodibit *ex lemm.* 3. quartus proportionalis quæsitus.

Examen itaque regulæ inversæ fit brevissime, multiplicando primum terminum in secundum, & tertium in quartum. Nam si producta sint æqualia, res bene peracta est.

Schol. I. *Arithmetici, in quibus Tacquet, assignant dignoscendæ hujus regulæ indicium hujusmodi. Cum proponitur aliqua res diversa a quatuor terminis quæstionis, tunc proportio erit reciproca, seu inversa. Sic in primo exemplo proponitur seges metenda, quæ est res omnino diversa a quatuor terminis proportionalibus. In secundo exemplo proponitur annona, quæ est res diversa a quatuor terminis ejusdem quæstionis. Similiter in tertio vestis conficienda, quæ proponitur, est quid diversum a terminis in quæstione datis. Hoc dictum sit in gratiam tyronum. Ceterum ex ipsa quæstionis natura facile dijudicari potest, utrum proportio directa sit, an inversa.*

Schol. II. *Si terminus, qui annexam habet quæstionem, ponatur primo loco, secundo autem loco terminus illi homogeneus, proportio inversa reducitur ad directam. Sic in primo exemplo messores* 10 *se habent ad messores* 20, *ut dies* 4 *ad* *dies*

dies 8, *proinde ducendo* 20 X 4, *&* *dividendo productum* 80 *per primum terminum* 10, *habetur quartus proportionalis*, *ut in* Propoſ. 1. hujus. *Similiter in ſecundo exemplo menſes 6 ad menſes 3 ita ſe habent*, *ut milites* 1500 *ad milites* 750, *adeoque producto ex* 3 X 1500 *diviſo per primum terminum 6*, *oritur quartus proportionalis* 750, *ut antea.*

Schol. III. *Regulam inverſam compoſitam ultro omittimus*, *quod tyrones haud parum ſoleat confundere*, *&* *in rebus Geometricis*, *vel etiam in hominum commercio vix unquam occurrat.*

PROPOSITIO IV.

Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia.

I. CUm in regula directa primus terminus præciſe continet ſecundum, vel (quod idem eſt) præciſe continetur in ſecundo, tunc reduci poteſt proportio ad minimos terminos *per Prop.* 2. *Cap.* 3., & regulæ praxis breviſſima evadit. Sic exemplum, lib. 4. valent ſcuta 12, quid libræ 9? Reductis 4 & 12 ad minimos terminos 1 & 3, dic ſi 1 dat 3, quid 9? & ducendo 3 X 9, habetur quartus proportionalis 27, qui unitas non dividit.

Pro regula inverſa in primo exemplo *Prop.* 3. Si meſſores 20 exigunt dies 4, quid meſſores 10? Quia 20 ad 10 ſe habere debet reciproce, ut quartus

tus terminus ad secundum 4, reductis 20 & 10 ad minimos terminos 2 & 1, dic si 2 dat 4, quid 1? ductisque 2 X 4, habetur quartus proportionalis 8.

II. Ad evitandum divisionis prolixioris tædium, dividatur tertius terminus per primum, & quotus ducatur in secundum: vel dividatur secundus per primum, & quotus ducatur in tertium; in utroque enim casu operatio fit brevior. Ut si leucæ 25 dant milliaria Italica 60, quid leucæ 100? Divisis 100 per 25, duc quotum 4 X 60, erit 240 quartus proportionalis quæsitus. Vel diviso 60 per 25, quotus 2 $\frac{2}{5}$ ducatur in 100, productum $\frac{1200}{5}$, seu 240, erit quartus proportionalis quæsitus.

III. Regula proportionum confici potest per solam divisionem, nimirum dividendo primum terminum per secundum, & dividendo per hunc quotum terminum tertium. Sic ex. gr. 2 gradus circuli maximi terræ continent milliaria Italica 120, gradus 360 quot milliaria continebunt. Diviso primo termino per secundum, habetur $\frac{2}{120}$, hoc est $\frac{1}{60}$; per hunc divide 360, quotus $\frac{21600}{1}$ dat milliaria Italica quæsita.

IV. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut si dicatur 12 $\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum, quam tertium terminum, fient tres termini proportionales sine fractionibus 25, 4, & 40. Si afficiant solum secundum terminum, ut 6 dant 20 $\frac{2}{3}$, quid 10? Satis est multiplicare per eundem denominatorem 3 primum & secundum terminum, erunt

erunt termini proportionales 18, 61, & 10. Similiter si fractiones ejusdem nominis afficiant primum & tertium terminum, ut si dicatur 3 $\frac{2}{5}$ dant 20, quid 10 $\frac{3}{5}$? Multiplicatis iisdem duobus terminis per denominatorem 5, erit regula sine fractis, ac termini proportionales 17, 20, 53. Si termini sibi respondentes sint minutiæ ejusdem nominis, ut $\frac{2}{7}$ dat 20, quid $\frac{1}{7}$? deletis denominatoribus erunt termini proportionales 2, 20, 1. Horum ratio, perceptis fractorum regulis, satis patet.

Schol. *Hæc, aliaque similia compendia dicuntur* Italica, *vel quia ab Italis inventa, vel quia in Italia usum habeant frequentiorem.*

PROPOSITIO V.

De Regula Societatis.

Regula, quæ docet modum dividendi numerum in data proportione, vulgo dicitur *Regula Societatis*, quod apud homines mercaturæ societatem ineuntes frequenter adhiberi soleat.

Sint mercatores *A*, *B*, *C*, qui societate inita, lucrati sunt aureos 800. *A* posuit in sortem communem aureos 100, *B* aureos 160, *C* vero 240: quæritur quantum quisque ex eo lucro debeat accipere. Collige in unam summam singulorum pecuniam, nempe aureos 500. Deinde instituatur toties regula proportionum, quot sunt singulorum pecuniæ, ita ut primus terminus semper statuatur summa pecuniæ collatæ, secundus lucrum au-

reo-

reorum 800, tertius vero uniuscujusque pecunia *A*, *B*, *C*.

Dic ergo si 500 dat 800, quid 100? 160
quid 160? 256
quid 240? 384

800

Patet lucrum *A* fuisse aureorum 160, lucrum *B* 256, & *C* 384, quæ simul efficiunt summam lucri, adeoque statim habetur regulæ examen.

II. Si pecunia unius diutius fuerit in negotiatione, quam pecunia alterius, tunc uniuscujusque pecunia multiplicari debet per suum tempus. Cetera peragenda, ut supra.

Sit exemplum. A posuit in sortem communem aureos 50 annis 2, *B* aureos 100 annis 3, *C* vero aureos 200 anno 1. Lucrum fuit aureorum 500, quæritur singulorum lucrum. Duc 50 X 2, 100 X 3, & 200 X 1, producta dant summam 600: quæ erit primus terminus proportionum: secundus lucrum comparatum aureorum 500; tertius vero pecunia singulorum per suum tempus multiplicata.

Dic ergo si 600 dant 500, quid 100? $83\frac{1}{3}$
quid 300? 250
quid 200? $166\frac{2}{3}$

500

Est igitur lucrum ipsius *A* aureorum $83\frac{1}{3}$. Lucrum *B* aureorum 250, *C* vero aureorum $166\frac{2}{3}$, quæ addita faciunt aureorum summam 500.

III. Quod

III. Quod si singulorum pecunia æqualis fuit, tempus autem inæquale: nam *A* reliquit in societate pecuniam suam mensibus 7, *B* vero mensibus 6, *C* denique mensibus 12, lucrum autem extiterit aureorum 1000; collige in unam summam menses, faciunt 25, eritque hic primus regulæ terminus, secundus erit lucrum, tertius menses singulorum. Tum adhibe ter regulam auream, invenies lucrum primi aureos 280, secundi 240, tertii 480.

Si menses aur. quid menses

25	. 1000	::	7?	280
			6?	240
			12?	480
				1000

Coroll. Hinc apparet modus dividendi pecuniam v. g. aureos 1000 in proportione data temporis, quo tres famuli domino suo servierunt, quorum primus serviverit annis 7, secundus annis 6, tertius annis 12. Aliæ similes quæstiones ex hac regula facile solvuntur, quæ non est, nisi regula proportionum sæpe repetita, ut patet. Quod de lucro dictum est, intelligi eodem modo debet de damno, si societati improspere cesserit, ac damnum in singulos sit dividendum, habita ratione pecuniarum, & temporis.

PROPOSITIO VI.

De Regula Alligationis.

CUm variæ res diversi pretii inter se alligantur, seu miscentur, ut varii liquores, merces, metalla &c. atque inde pretium partibus mixti respondens inquiritur: seu, cum pretio quodam medio proposito, quæritur, quantum ex singulis mercibus, aut liquoribus misceri debeat, ut pretio illo arbitrario vendi possint; in utroque casu adhibetur regula, quam Arithmetici regulam *Alligationis* vocant, quæ per exempla satis superque innotescet.

I. Conflanda est statua argentea librarum 300. Artifex duo argenti genera posuit, alterum quod in singulas libras stat scutis 30, alterum vero scutis 25. Ex priore posuit libras 120, ex posteriore libras 180. Quæritur quot scutis stabit in singulas libras ejusmodi statua?

Duc libras	120X30 fit	3600
	180X25	4500
		8100

Tum divide totius argenti pretium 8100 per numerum librarum 300, quotus 27 indicat unius libræ prætium. Nam si lib. 300 valent scut. 8100, quid lib. 1? Ex regula aurea habentur 27.

II. Sunt duo olei, aut vini genera, mensura 1 primi generis stat juliis 24, secundi generis mensura

sura 1 valet juliis 35. Si quis non habeat nisi julios 33, & mensuram unam ex utroque vino mixtam petat, quæritur ex utroque quantum debeat accipere.

1. Pone unum pretium statutum sub altero 24 & 35, & ad sinistram pretium arbitrarium 33, medium inter pretia statuta 24 & 35; ad dexteram vero differentias inter hoc, & pretia illa, sed alternatim ita ut differentia pretii minoris 24 (hoc est 9) ponatur juxta pretium majus 35, & differentia pretii majoris 35, nempe 2, ponatur juxta pretium minus 24, ut in sequenti exemplo factum vides.

2. Colligantur differentiæ in unam summam, ut hic 11, & instituatur regula trium toties, quot sunt differentiæ, nempe bis in hoc exemplo; ita ut summa differentiarum 11 occupet primum locum, mensura vero 1 secundum locum, & una ex differentiis tertium. Tum dic, si 11 dat 1, quid 2? Rursus, si 11 dat 1, quid 9? Invenies ex potiori vino accipiendas esse $\frac{9}{11}$ unius mensuræ, ex altero vero $\frac{2}{11}$, quæ simul sumptæ faciunt $\frac{11}{11}$, hoc est mensuram unam quæsitam.

	Pretia	*Differ.*		
33 {	24 {	2 {	Si 11 dat 1, quid 2?	$\frac{2}{11}$
	35	9	quid 9?	$\frac{9}{11}$
	Summa	11		$\frac{11}{11}$

III. Quando autem plurium, quam duarum rerum pretia statuta proponuntur, ita tamen ut saltem unum sit majus, alterum vero minus pre-

 tio

tio arbitrario; tunc plures fieri debent alligationes, quod exemplo satis vulgari explicatur.

Libra 1 Caryophilli valet juliis 3. Piperis libra, juliis 4. Cinnamomi, 6. Croci, 9: quæ brevitatis gratia sint *A*, *B*, *C*, *D*. Pretium vero medium sit *M*. Quæritur, quantum quis debeat ex singulis accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7. Primo disponantur ordinatim pretia, ut in exemplo sequenti. Secundo alligenter inter se duo pretia *A* & *D*, hoc est comparentur ambo cum pretio *M*, ut inveniantur differentiæ excessus, & defectus, nempe 2 & 4, quæ ponantur alternatim juxta *A* & *D* modo superius explicato. Eodem modo alligentur duo pretia *B* & *D* (idem pretium alligari potest pluries) differentiæ excessus est 2, defectus autem est 3, quæ ponantur alternatim juxta *B* & *D*. Similiter alligentur *C*, & rursus *D*, differentiæ sunt 2 & 1, quæ pariter statuantur alternatim juxta *C* & *D*.

3. Colligantur omnes illæ differentiæ in unam summam, quæ hic est 14. Deinde dic, si 14 dat libram 1, quid differentia 2? erit $\frac{2}{14}$, seu $\frac{1}{7}$; quod toties iteretur, quot sunt pretia data *A*, *B*, *C*, *D*, adeo ut tres differentiæ 4, 3, 1, quæ appositæ sunt ipsi *D*, addantur, & unicam differentiam 8 efficiant. En totius calculi typus.

	Pritia		*Differ.*
M 7	*A*	3	2.
	B	4	2.
	C	6	2.
	D	9	4. 3. 1.
		Summa	14

Si

Si 14 dat lib. 1. quid 2 ? $\frac{2}{14}$
2 ? $\frac{2}{14}$
2 ? $\frac{2}{14}$
8 ? $\frac{8}{14}$

Summa $\frac{14}{14} \doteq 1$.

Si fractiones, aut partes mixti additæ adæquent totum, regulæ examen exhibent. Sic in exemplo $\frac{14}{14} = 1$.

Demonstr. Summa differentiarum, quibus pretia statuta differunt per excessum, & defectum a pretio medio, habet ad totum mixtum eandem rationem, quam habent singulæ differentiæ seorsim sumptæ ad singulas partes mixti seorsim sumptas, ut patet; proinde toties regula proportionum iteratur, quot sunt differentiæ: quæ idcirco locum alternant, ut pretium deficiens unius compensari queat per excessum alterius pretii. Quod &c.

Corol. I. Ex superiori exemplo manifestum est, unumquodque pretium saltem semel alligari debere, idemque pretium posse pluries assumi, ut factum est cum pretio *D*.

Corol. II. Alligationes hujusmodi fieri possunt variis modis, siquidem pretium medium semper comparetur cum duobus pretiis, altero majori, altero minori. Pro diversa autem alligatione, diversa erit unius, vel alterius mercis, aut liquoris quantitas in mixto posita, ut patet.

PRO-

PROPOSITIO VII.

De regula simplicis Positionis, seu falsi.

Ea regula *falsi* dicitur, quæ ex positione numeri plerunque falsi docet verum numerum invenire, qui quæstioni satisfaciat. Dicitur *simplicis Positionis*, si simplex ponatur numerus, ut in hac Propos. fiet; duplicis vero, si duo numeri assumantur, ut in *Prop. seq.*

Regula simplicis Positionis in tribus consistit, nempe

1. Ponitur numerus, qui videtur aptus ad solvendam quæstionem, qui dicitur *Positio*.

2. Examinatur ille numerus, an talis sit, qualis exquiritur.

3. Instituitur regula proportionum ad verum numerum inveniendum. Res exemplis fit evidens.

I. Sempronius testamento mandavit, aureos centum distribui in tres fratris sui filios *A*, *B*, *C* hac lege, ut *A* habeat partem duplam *B*, & *B* partem triplam ipsius C. Quæritur quantum singuli debeant accipere.

Pone *A* habere aureos 6, habebit *B* aureos 3, *C* vero 1. Examina, an tres illæ partes 6, 3, 1 simul efficiant 100 (nam si 100 efficerent, problema esset absolutum) sed illæ efficiunt tantum 10. Adhibe jam regulam proportionum, in qua ponatur primo loco numerus, qui ex falsa positione provenit, ut hic 10: secundo loco statuitur numerus

merus primo assumptus, seu Positio, ut hic *6*; tertio loco numerus datus in quæstione, hoc est 100, invenies *60*. Itaque *A* habebit *60* aureos, *B* 30, *C* vero 10, quorum summa est 100, scilicet

$$10 . 6 :: 100 . 60 .$$

II. Cajus interrogatus, quot aureos haberet, respondit, aureorum meorum $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ faciunt summam 470. Quæritur ea summa? Patet hic quæri numerum, cujus partes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ simul sumptæ efficiant 470. Ad evitandas fractiones assume numerum, qui contineat partes in quæstione expressas. Esto hic *60*, cujus $\frac{1}{3} = 20$, $\frac{1}{4} = 15$, $\frac{1}{5} = 12$, quæ partes additæ faciunt 47. Debebant autem efficere 470. Institue regulam proportionum, dispositis terminis modo superius explicato, nimirum

$$47 . 60 :: 470 . 600 .$$

Habebat ergo Cajus aureos *600*, quorum $\frac{1}{3} = 200$, $\frac{1}{4} = 150$, $\frac{1}{5} = 120$, quæ partes simul additæ efficiunt 470.

III. Sunt quatuor molæ, quarum prima singulis horis molit tritici modios 7, secunda *6*, tertia 4, quarta 3. Quæritur tempus, quo molentur tritici modii 3*6*0, omnibus illis molis simul adhibitis.

Pone requiri horas 5, hoc tempore prima mola conficit modios 35, secunda 30, tertia 20, quarta 15, qui omnes sunt modii 100, debebant autem esse 3*6*0. Instituatur ergo regula proportio-

tionis: si modii 100 poscunt horas 5, quid modii 360? Invenies horas 18. Nam

100. 5 :: 360. 18.

Quo tempore prima mola conficiet modios 126, secunda 108, tertia 72, quarta 54, qui simul additi efficiunt modios 360.

Demonstr. Ut se habet (in primo exemplo 10 ad 6 + 3 + 1 simul sumptos in falsa positione, ita se habet in vera positione 100 ad 60 + 30 + 10 simul sumptos. Proinde regula stat in hoc ut numerus fallus 10, productus per numerum falsum 6, ita se habeat per regulam auream ad ipsum numerum fallum 6, sicuti verus numerus 100 ad verum numerum 60.

PROPOSITIO VIII.

De Regula duplicis Positionis.

Regula *duplicis Positionis* non unum, sed duos supponit numeros, ut in *Propos. prac.* dictum est, solvitque plures quæstiones, quæ per unam positionem resolvi nequeunt. Omnes tamen quæstiones, quæ per unam positionem solvuntur, etiam per duas solvi possunt. Quando autem duplici positione opus sit, indicabitur inferius in *Schol.* En regulæ ordo.

1. Pone pro numero quæsito quemcunque numerum, qui dicitur *Positio*, & cum eo procede juxta

juxta tenorem quæstionis; cui si non satisfaciat, errorem (hoc est excessum, vel defectum, quo positio aberrat a numero quæsito) subscribe eidem positioni, cum signo +, vel —, quorum unum plus, sive excessum, alterum minus, seu defectum denotat.

2. Ponatur alius numerus priore major, vel minor, cum quo similiter examinetur quæstio proposita, cui si non satisfaciat, errorem pariter ei positioni subscribe cum signis +, vel —. Cum ambo errores sunt per excessum, vel ambo per defectum, dicuntur *similes*. Cum autem unus est per excessum, alter per defectum, hoc est cum signis diversis + & —, dicuntur errores *dissimiles*.

3. Si errores sunt similes, ducatur prima positio in errorem positionis secundæ, & vicissim positio secunda in errorem primæ positionis. Tum horum productorum differentia dividatur per differentiam errorum, quotus erit numerus quæsitus.

4. Si errores sunt dissimiles, productorum summa dividitur per summam errorum, quotus dat quæsitum.

I. Tres juvenes *A*, *B*, *C* lucrati sunt aureos 47. *B* obtinuit aureos 5 plus quam *A*; *C* tantundem quantum *B*, & insuper 10, quæritur lucrum singulorum.

Pone lucrum *A* fuisse 4, lucrum *B* erit *9*; *C* vero *19*. Adde simul 4,*9*,*19*, fiunt 32, at debebant esse 47, est ergo error, seu defectus in 15.

Rursus pone lucrum *A* fuisse *7*, erit lucrum *B* 12, *C* vero 22, qui simul faciunt 41, quæ summa deficit a vera 47 per defectum *6*.

P Cum

Cum itaque duo errores similes sint (nempe ambo per defectum) duc positionem 4 in errorem secundæ positionis , hoc est in *6* , & positionem 7 in errorem 15 ; fiunt duo producta 24 & 105, quorum differentia est 81 , quem divide per differentiam unius erroris ab alio, idest per *9* , (subtrahendo errorem *6* ex alio errore 15) quotus *9* dat numerum quæsitum. Itaque lucrum *A* fuit aureorum *9*, *B* vero 14, & *C* 24, quorum summa est 47.

Posit. 4, *Err.* — 15) *9 diff.*
Posit. 7, *Err.* — *6*)

Prod. $4 \times 6 = 24$
$7 \times 15 = 105$

Differ. 81

II. Si utraque positio sit excedens, praxis est omnino eadem. Ponamus enim lucrum *A* fuisse 12, erit lucrum *B* 17, & lucrum *C* 27, quorum summa est 56, excedens numerum datum 47 per errorem *9*.

Pone iterum 11 pro lucro *A*, erit lucrum *B* 16, & lucrum *C* 26, quorum summa 53 adhuc peccat per excessum *6*. Cum igitur errores similes sint (nempe per excessum) duc positionem 12 in errorem *6* alterius positionis , & positionem 11 in errorem *9*. Tum subtrahe productum minus 72 ex majori producto *99* , & residuum 27 divide per differentiam errorum *9* & *6*, hoc est per

per 3, quotus 9 dat numerum quæsitum, ut prius.

Posit. 12, *Err.* + 9 ⎫
Posit. 11, *Err.* + 6 ⎭ 3 *diff.*

Prod. 6 × 12 = 72
9 × 11 = 99

Differ. 27

III. Quod si una positio sit excedens, altera deficiens, summa productorum dividitur per summam errorum, ut dictum est supra num. 4. Sit idem exemplum claritatis gratia.

Pone lucrum *A* fuisse 5, lucrum *B* erit 10, & lucrum *C* 20, quorum summa 35 deficit a summa data 47 per defectum 12; sumendus est igitur numerus major.

Pone lucrum *A* 11, *B* vero 16, & *C* 26, summa omnium 53 excedit veram summam 47 in 6. Ducatur jam positio prima 5 in errorem 6, & vicissim positio 11 in errorem 12. Deinde quia errores sunt dissimiles, addantur duo producta 30 & 132, eorumque summa 162 dividatur per summam errorum 18, quotus 9 dat rursus numerum quæsitum, ut antea.

Posit. 5, *Err.* — 12 ⎫
Posit. 11, *Err.* + 6 ⎭ 18 *summa*

Prod. 5 × 6 = 30
11 × 12 = 132

Summa 162

Sit aliud exemplum. Interrogatus Pythagoras de numero ſuorum diſcipulorum, reſpondit, eorum dimidium dare operam Geometriæ, quartam partem Philoſophiæ, ſeptimam partem ſervare ſilentium; inſuper tres alios ſe habere inſtituendos. Quæritur eorum diſcipulorum numerus.

Ponatur diſcipulos habuiſſe 56, dimidium erit 28, quarta pars 14, ſeptima pars 8, quorum ſumma eſt 50: his addantur illi 3, fiunt 53, deberent eſſe 56; eſt ergo error per defectum 3, quem nota juxta ipſam poſitionem 56.

Rurſus ponatur diſcipulorum numerus 112, dimidium erit 56, quarta pars 28, ſeptima 16, quæ ſimul efficiunt 100, additiſque 3, fiunt diſcipuli 103. Eſt ergo iterum error per defectum 9, quem nota ad poſitionem 112.

Jam duc poſitionem primam 56 in errorem ſecundæ poſitionis, hoc eſt in 9, & viciſſim poſitionem ſecundam 112 in alterius poſitionis errorem 3, proveniunt 504 & 336. Cumque errores ſimiles ſint, eorum productorum differentiam 168 divide per differentiam errorum 6; quotus 28 dat numerum quæſitum diſcipulorum. Nam ejus dimidium eſt 14, quarta pars 7, ſeptima 4, quæ ſimul faciunt 25, additiſque 3, habetur numerus 28.

Poſit. 56, *Err.* — 3 ⎫ *6 diff.*
Poſit. 112, *Err.* — 9 ⎭

Prod. $56 \times 9 = 504$
$112 \times 3 = 336$

Differ. 168

Poſtre-

Postremo sunt tres numeri ignoti a, b, c, qui sumpti bini dant summam, ut sequitur

$$a + b = 50$$
$$b + c = 70$$
$$a + c = 60$$

Quæritur singulorum valor. Pone $a = 16$, erit $b = 34$, ergo $c = 36$, proinde $a + c = 16 + 36$, hoc est 52. Sed esse debebat 60; ergo positio prima 16 peccat per defectum 8.

Pone itaque $a = 18$, erit $b = 32$, ergo $c = 38$, adeoque $a + c = 18 + 38$, hoc est $= 56$, sed debebat esse 60; est ergo rursus error per defectum 4. Pro inveniendo vero numero, fiant cetera, ut supra; reperietur $a = 20$, proinde $b = 30$, $c = 40$, unde $a + c = 20 + 40$, seu 60, quod quærebatur.

Schol. *Indicium autem quando quæstio proposita solvi non possit per unam positionem, sed duplicem omnino requirat, est cum quæstioni aliquis determinatus numerus additus est, qui una cum numero ad libitum posito debet assumi. Sic in primo exemplo numeri illi determinati 5, & 10, qui adduntur numero ad libitum posito, indicio sunt duplici positione opus esse. In secundo autem exemplo numerus ille determinatus discipulorum 3 non importat duplicem positionem, quia non afficit partes aliquotas* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ *numeri quæsiti, unde quæstio illa etiam per simplicem positionem solvi potest. Quæritur enim numerus, ex quo si auferantur* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ *residum sit* 3. *Ponatur idem nu-*

numerus 56, *qui prius ; erit* $56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = 6$, *quod residuum debebat esse* 3. *Dicatur ergo si residuum 6 provenit ex* 56, *unde* 3? *Prodibit quartus proportionalis* 28, *qui quæstionem solvit, ut antea.*

PROPOSITIO XLIX

Aurificis furtum in corona Hieronis regis detegere.

VItruvius *lib.* 9. *Cap.* 3. refert, ab Archimede deprehensam fuisse fraudem, quam artifex auream Hieronis regis coronam, admixta argenti portione, adulteraverat ; sed quo præcise artificio id egerit, non satis constat. Duas tamen massas fecisse dicitur, alteram ex auro puro ejusdem ponderis cum corona, alteram ex argento item puro ponderis ejusdem : tum hæc tria in vas aqua plenum seorsim immittens, aquam inde effluentem sedulo exploravit, atque hinc quantum argenti in ea corona fuerit admixtum, invenit.

Fingamus igitur coronæ pondus fuisse lib. 12, item auri, & argenti massas ; & dum corona in vas aqua plenum demitteretur, effluxisse aquæ libras $7\frac{4}{5}$, dum autem immergeretur auri massa, effluxisse aquæ libras $7\frac{1}{5}$, immersa demum argenti massa, effluxisse aquæ libras $10\frac{4}{5}$. Jam ex regula duplicis positionis ponatur, in ea corona fuisse auri lib. 9, erant ergo argenti lib. 3. Itaque per regulam proportionum dic, si puri auri lib. 12.

lib. 12 dant aquæ libras $7\frac{1}{5}$, quid lib. 9? invenies lib. $5\frac{2}{5}$. Item, si puri argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 3? proveniunt lib. $2\frac{7}{10}$. Adde simul libras $5\frac{2}{5}$, & $2\frac{7}{10}$, habentur aquæ lib. $8\frac{1}{10}$, debebant autem esse lib. $7\frac{4}{5}$; est ergo error per excessum $\frac{3}{10}$, qui notetur cum signo + una cum positione assumpta 9.

Ponatur secundo in eadem corona fuisse auri lib. 8, ergo ex argento erant lib. 4. Dic igitur per regulam auream, si auri puri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 8? inveniuntur lib. $4\frac{4}{5}$. Similiter, si argenti puri lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$, quid lib. 4? proveniunt per regulam proportionum aquæ lib. $3\frac{3}{5}$. Adde simul lib. $4\frac{4}{5}$, & $3\frac{3}{5}$, fit summa librarum aquæ $8\frac{2}{5}$, debebant autem esse lib. $7\frac{4}{5}$. Peccatum est igitur rursus per excessum $\frac{3}{5}$, seu $\frac{6}{10}$, qui notetur cum + juxta positionem 8, ut sequitur

$$\begin{array}{l} \textit{Posit.}\ 9,\ \textit{Err.} + \frac{3}{10} \\ \textit{Posit.}\ 8,\ \textit{Err.} + \frac{6}{10} \end{array} \Bigg)\ \frac{3}{10}\ \textit{differ.}$$

$$\textit{Prod.}\ 9 \times \frac{6}{10} = \frac{54}{10}$$

$$8 \times \frac{3}{10} = \frac{24}{10}$$

$$\textit{Differ.}\ \frac{30}{10} = 3$$

Ductis jam $9 \times \frac{6}{10}$, & $8 \times \frac{3}{10}$ habentur $\frac{54}{10}$, & $\frac{24}{10}$; quorum differentiam $\frac{30}{10}$, seu 3, divide per differentiam errorum, hoc est per $\frac{3}{10}$, quotus $\frac{30}{3}$, seu 10, dat auri libras quæsitas. Erant ergo immixtæ 2 argenti libræ.

Ut fiat examen dic, si auri lib. 12. dant aquæ lib. 7

lib. 7 $\frac{1}{5}$, quid lib. 10? invenies lib. 6. Item si argenti lib. 12 dant aquæ lib. 10 $\frac{4}{5}$ quid lib. 2? invenies lib. 1 $\frac{4}{5}$. Adde igitur 6, & 1 $\frac{4}{5}$, summa librarum 7 $\frac{4}{5}$ dat tantum aquæ, quantum, dum corona immergeretur, effluxit.

Schol. I. *Sed nota non opus fuisse Archimedi, aut cuiquam alteri, qui experimentum hujusmodi facere velit, conficere auri, vel argenti massas ejusdem ponderis cum corona; sed satis esse aliquam auri, & argenti portionem noti ponderis assumere, ut habeatur inter auri, ac argenti pondus, & aquæ effluentis quantitatem proportio.*

Schol. II. *Per regulam duplicis positionis aliæ plures quæstiones pulcherrimæ solvi possunt, quæ tamen longe facilius, & universali modo per Algebram expediuntur: a qua pariter peti debet Propositionis hujus simplex, ac genuina demonstratio; ut videre est apud Bernardum Lamy in Elementis Mathematicis ann. 1704 edit. Paris. pag. 358. Demonstrationes autem aliunde petitæ prolixæ sunt admodum, & implicatæ, quas proinde nos prætermittimus.*

PROPOSITIO [redacted] X

Datis duobus numeris tertium proportionalem invenire.

DUc secundum in seipsum, & productum divide per primum, quotus erit tertius proportionalis quæsitus. Dati sint 2 & 8, quibus tertius

tius proportionalis inquiritur. Ducatur 8 X 8, & productum 64 dividatur per 2, quotus 32 est numerus quæsitus. Sic 2, 8, 32, sunt in eadem proportione subquadrupla. Ratio patet *ex 1. lem.*

Schol. *Si numeri dati sint inter se primi, hoc est unus non sit alterius multiplex, tertius proportionalis non erit numerus integer, sed fractus. Sic datis 2 & 5 invenitur* per hanc Prop. *tertius proportionalis* $\frac{25}{2}$, *hoc est* 12 $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XI.

Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.

MEdius proportionalis inter duos numeros datos dicitur numerus, qui ita se habet ad alterum datum, sicut alter datorum ad ipsum; ita ut numeri dati sint extremi, & ipse medius; qui bis sumitur, semel ut consequens respectu primi, & semel ut antecedens respectu alterius.

Dati sint numeri 4 & 16, inter quos medius proportionalis quæritur. Duc illos inter se, & ex producto extrahe radicem quadratam, radix erit medius proportionalis. Sic 4 X 16 = 64, cujus radix quadrata est 8 *per Propos.* 2. *Cap.* 5. Sunt igitur 4, 8, 16 continue proportionales, nam 4. 8::8. 16. Ratio patet *ex* 1. *lem.*

Schol. I. *Si productum ex numeris datis non sit quadratum, ita ut radix quadrata ab eo erui non possit sine residuo; tunc medius proportionalis inve-*

niri nullo modo potest. Nam dati numeri sint v. g. 2 *&* 5, *radix quadrata* per Prop. cit. *&* Schol. 2, *erit* 3 $\frac{1}{6}$. *Adeoque erunt in continua proportione* 2, 3 $\frac{1}{6}$, 5, *quod est falsum, nam si reducantur ad idem nomen, erunt* $\frac{12}{6}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{30}{6}$, *seu* 12, 19, 30, *qui nullo modo sunt proportionales, ut patet.*

Schol. II. *Cum omne quadratum intelligi possit multiplicatum esse per unitatem, hinc omnis radix quadrata erit media proportionalis inter unitatem, & ipsum quadratum. Sic* 25, *radix quadrata numeri* 625, *est media proportionalis inter* 1. *&* 625, *proinde* 1, 25, 625 *sunt in eadem ratione continua. Nam* 1 . 25 : : 25 . 625.

PROPOSITIO XII.

Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire.

Quadratum unius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto extrahatur radix cubica *per Prop.* 3. *Cap.* 5., quæ erit duorum mediorum proportionalium prior. Deinde quadratum alterius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto pariter extrahatur radix cubica, quæ erit duorum mediorum proportionalium posterior.

Dati sint numeri 2 & 16, quos inter invenire oporteat duos medios proportionales. Quadra minorem numerum 2, ejusque quadratum 4 duc

in

in 16, fiunt 64, cujus radix cubica 4 erit prior duorum proportionalium. Similiter quadratum alterius numeri 16, nempe 256, duc in 2, fiunt 512, cujus radix cubica 8 erit duorum proportionalium posterior; proinde 2, 4, 8, 16 sunt in continua proportione, ut patet, cum sit 2 ad 4, ut 4 ad 8, & 4 ad 8, ut 8 ad 16.

Schol. *Si ad numerum datum, & primum medium proportionalem inventum, quæratur tertius proportionalis* per Propos. 10. hujus; *vel si inter medium proportionalem inventum, & alterum numerum datum inveniatur medius proportionalis* per Propos. 11. hujus; *in utroque casu obtinebitur secundus duorum mediorum proportionalium quæsitus. Ceterum si numeri dati sint tales, ut inde radix cubica obtineri non possit sine fractionibus; tunc medii proportionales inveniri nequeunt, ut de uno medio proportionali dictum est* in Schol. 1. Propos. præc.

PROPOSITIO. XIII.

Quæstiones aliquot practicæ expediuntur.

Etsi quæstiones fere omnes, quæ sequuntur, ex regulis proportionum jam explicatis facile resolvi possint; quia tamen eas ordinare, atque expedire tyronibus negotium facessit, adeoque Arithmetici practici peculiares de his tractatus instituerunt, proinde nos præcipuas breviter indicabimus, ita tamen ut ex ipsa praxi operandi etiam methodus innotescat.

1. Marcellus debet Titio ſcuta Romana 3432. Cedit illi domum, quæ locari ſolet annuis ſcutis 53 $\frac{2}{7}$, poſſidendam, donec debitum ſit omnino ſolutum, quæritur quot annis eam Titius poſſidebit.

Dividantur ſc. 3432 per ſc. 53 $\frac{2}{7}$ (redactis integris cum fractione ad fractionem ejuſdem nominis) invenientur anni 63, menſes 11, dies 12, quod per ſe manifeſtum eſt.

2. Impendit Paulus ſcuta Romana 415. 35 in libras 385 mercis cujuſdam coemendas, unde lucrari cupit ſcuta 50. 50, quæritur quanto ſingulas libras vendere debeat.

Addantur ſimul emptæ mercis pretium, & lucrum inde faciendum, nempe 415. 35 + 50. 50 = 465. 85, quæ quidem ſumma dividatur per numerum librarum 385, quotus dat unius libræ pretium. ſcilicet ſc. 1 : 21.

3. Lucilius vendidit aureis 9072 fundum, quem emerat aureis 8400; quærit quantum ex ſingulis 100 lucratus ſit?

Dic per regulam proportionum ſi 8400 fiunt 9072, quid 100? Invenies 108. Fuit ergo ex ſingulis 100 lucrum aureorum 8.

Vel ſic, ſubtrahe 8400 ex 9072, differentia, ſeu lucrum eſt aureorum 672. Dic ergo, ſi 8400 dat 672, quid 100? invenies 8, ut antea.

Examen fit ſi dicas, 100 fiunt 108, quid 8400? invenies 9072.

4. Fingamus ab eodem Lucilio ſolvendam eſſe penſionem ſcutorum 500 annis quinque, hoc eſt ſcuta 100 ſingulis annis; quam ille emit parata pecunia, ſolutis ſtatim ſcutis 400. Quæritur,

quan-

quantum lucri ex ſingulis 100 percipiat.

Dic per regulam auream, ſi ſcuta 400 fiunt 500, ſeu *per Prop.* 4. *hujus*, ſi 4 fiunt 5, quid 100? invenies 125; adeoque ex ſingulis 100 habet lucrum ſcutorum 25.

Examen erit, ſi dicas 100 fiunt 125, quid 400? fiunt 500.

Schol. I. *Quæſtiones hujus generis pertinent ad regulas lucri*, *ſeu* ſimplicis meriti, *ut vocant.*

5. Fabius debet Sempronio aureos 660 annis tribus ſolvendos, hoc eſt ſingulis annis aureos 200. Paratus tamen eſt ſtatim aureos 660 creditori ſolvere, ſiquidem 10 ex ſingulis 100 ſibi relaxet. Quæritur, quot aureos ſolvere debeat.

Adde lucrum 10 ad 100 fiunt 110. Tum per regulam auream ter repetendam (quot ſcilicet anni ſunt) dic ſi 110 fiunt 100; vel (*per Prop.* 4. *hujus*) ſi 11 fiunt 10, quid 220? fiunt 200. Rurſus dic, ſi 11 fiunt 10, quid 200? invenies 181 $\frac{9}{11}$. Demum, ſi 11 dant 10, quid 181 $\frac{9}{11}$? proveniunt 165 $\frac{35}{121}$. Addantur ſimul 200, 181 $\frac{9}{11}$, 165 $\frac{35}{121}$. Erit ſumma 547 $\frac{13}{121}$. Accipiet ergo Sempronius tantum aureos 547 $\frac{13}{121}$.

Schol. II. *Nota in hac aliisque hujus generis quæſtionibus dici non poſſe, ſi* 100 *fiunt* 90, *quid* 220? *Sed neceſſario addi debere lucrum ipſum* 10 *ad* 100. *Nam nihil aliud proponitur relaxandum, niſi lucrum; proinde lucrum ipſum additur ad ſortem*, *ſeu* 100, *ut habeatur* 110, *primus regulæ aureæ terminus.*

6. Eadem ratione ſi quis ad tres annos domum conduxerit cum annua penſione ſcutorum 300, domi-

domino autem ejus domus omnem statim summam in antecessum solvat ea conditione, ut sibi scuta 5 pro singulis 100 compenset: dices, si 105 fiunt 100, seu (dividendo 105, & 100 per 5) si 21 fiunt 20, quid 300? invenies 285 $\frac{5}{7}$. Rursus, si 21 fiunt 20, quid 285 $\frac{5}{7}$? fiunt 272 $\frac{16}{147}$. Demum si 21 dant 20, quid 272 $\frac{16}{147}$? proveniunt 259 $\frac{467}{3087}$. Horum summa 816 $\frac{97}{100}$ (redactis fractionibus in partes centesimas) in antecessum domus illius domino solvenda est.

Quod si aurei illi *660* a Fabio triennio post solvendi sint; tunc additis, ut supra 10 ad 100, dic si 110 fiunt 100, seu, *per Prop.* 4. *hujus*, si 11 fiunt 10, quid *660*? erunt *600*. Rursus, si 11 fiunt 10, quid *600*? invenies 545 $\frac{5}{11}$. Demum, si 11 fiunt 10, quid 545 $\frac{5}{11}$? Fiunt 495 $\frac{105}{121}$; & hi solum Sempronio solvendi sunt.

Vel brevius, duc *660* X 10 X 10 X 10 = 1000, & productum *660000*, divide per 11 X 11 X 11 = 1331, quotus dat 495 $\frac{105}{121}$, ut antea.

Schol. III. *Hæc praxis vulgo dicitur*, scontare a capo d'anno.

7. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex fœnore auctio sortis. Nihil fuit a Cajo solutum toto triennio. Quæritur, quantum ipse pro sorte, atque usuræ usura fœneratori debeat.

Adde 10 ad 100 fiunt 110; deinde per regulam auream dic, si aurei 100 fiunt 110, seu si 10 fiunt 11, quid 500? invenies 550, hoc est 500 pro sorte, pro usura vero primi anni 50. Rursus

ſus pro ſecundo anno dic, ſi 10 fiunt 11, quid 550? fiunt 605. Demum ſi 10 dant 11, quid 605? Invenies ſumma a Cajo ſolvendam, aureos 665 $\frac{1}{2}$.

Vel brevius, duc 500 in 1331, hoc eſt in 11 X 11 X 11 = 1331, & productum 665500, divide per 1000, nimirum per 10 X 10 X 10 = 1000, quotus dat 665 $\frac{1}{2}$, ut antea.

Coroll. Hinc liquet, ſortem datam, nempe aureos 500, & ſummas deinde inventas per regulam proportionum 550, 605, & 665 $\frac{1}{2}$ eſſe terminos continue proportionales, cum omnes ſint in eadem proportione, quam habet 10 ad 11, proinde inter ſortem datam, & ultimi termini ſummam tot intercedunt medii proportionales, quot ejus fœnoris fuerunt anni uno minus. Hoc ipſum de præcedenti quæſtione debet intelligi.

Schol. IV. *Praxis hujuſmodi, quæ apud Latinos anatociſmus, ſive uſura uſuræ, & a nonnullis uſura Judaica dicitur, eſt a lege vetita. Ab Italis vocari ſolet meritum meriti, ſeu* meritare a capo d'anno. *Hac vero regula utimur, ubi fundus ex annuis fructibus continuo augeri, ac multiplicari debet.*

8. Terentius debet Gellio pro uſura primi anni ſummam ſortis & fœnoris ſimul ſcuta 4608, pro quarto autem anno ſcuta 6561; quæritur, quanta fuerit ſors, quantumque fœnus.

Quærantur inter 4608, & 6561 duæ mediæ proportionales, *per Prop.* 12. *hujus*: duc ſcilicet minorem 4608 in ſe, fit quadratum 21233664, quo ducto in majorem 6561, producitur 139314069504. Hinc

Hinc autem extrahatur radix cubica, *per Prop.* 3. *Cap.* 5. prodibit 5184, quæ erit duarum proportionalium minor, *per Prop.* 12. *cit.* Solvet igitur secundo anno pro sorte, ac fœnore scuta 5184: atque hinc deducitur sortis quæsitæ quantitas. Nam *ex præc. Coroll.* sortis summa, & reliquæ omnes, sunt inter se in proportione continua; proinde secundi anni summa 5184 se habet ad summam 4608 primi anni, sicuti hæc ad sortem quæsitam. Datis itaque duobus terminis 5184, & 4608, quæratur tertius proportionalis per *Propos.* 10. *hujus*, erit sors quæsita 4096. Hanc vero subtrahe ex summa data sortis & fœnoris primi anni, nempe ex 4608, innotescet ejusdem sortis usura, scutorum scilicet 512, seu 12 $\frac{1}{2}$ ex singulis 100. Nam dic, si scuta 4096 fiunt 4608, quid 100? invenies 112 $\frac{1}{2}$, hoc est 12 $\frac{1}{2}$ ex singulis centenis.

CAPUT II.

De Progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

PRogressio est complurium terminorum eadem ratione procedentium series. Si excessus, vel defectus, quo termini illi procedunt, sit æqualis, ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. qui binario crescunt, vel 15, 12, 9, 6, 3 &c. qui ternario decrescunt, tunc oritur *progressio Arithmetica*.

Si

Si vero termini sint in continua ratione Geometrica proportionales eo modo, quo in præcedenti capite explicatum est, tunc habetur *progressio Geometrica*. De utraque hic breviter agemus.

Datur etiam proportio Harmonica, seu Musica, in qua tres termini ita ordinantur, ut eadem sit proportio maximi ad minimum, quam habet differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi. Tales sunt numeri 3, 4, 6. Nam inter 6 & 3 est proportio dupla, sicuti dupla est proportio differentiæ inter 6 & 4, nempe 2, ad differentiam inter 4 & 3, nempe 1, scilicet 6. 3 :: 6 — 4. 4 — 3.

Regulæ progressionum hujusmodi consistunt in hoc, ut eorum terminorum series compendiose, & sine prolixæ calculationis tædio in unam summam colligantur.

LEMMATA.

I. IN progressione Arithmetica terminorum quorumcunque, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum terminorum, qui ab extremis æqualiter distant. Sint

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Erit $1 + 11 = 3 + 9$. Item $1 + 11 = 5 + 7$.

II. In progressione Arithmetica terminorum imparium summa extremorum, vel duorum terminorum æqualiter distantium, dupla est termini medii.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

In hac progressione septem terminorum summa 1 + 13 = 7 + 7, seu 14. Item 3 + 11 = 14, pariter 5 + 9 = 14.

III. In omni progressione Arithmetica quilibet terminus continet primum, hoc est minimum terminum, & toties excessum, seu differentiam una minus, quot sunt termini post primum usque ad ipsum inclusive. Sint

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Terminus quartus progressionis 7 continet, ut patet, minimum terminum 1, & ter differentiam 2. Pariter 9, terminus quintus progressionis, continet 1, & quater differentiam ipsam 2. Ita quoque 11, terminus progressionis sextus, continet 1, & quinquies differentiam 2, ut patet.

Coroll. Hinc habetur maximus progressionis terminus, si differentia ducatur in numerum terminorum unitate minutum, & producto addatur minimus terminus. Sic in præc. progressione, si differentia 2 ducatur in 5 (numerum terminorum unitate minutum) & producto addatur minimus terminus 1, habetur maximus terminus 11.



PRO-

PROPOSITIO I.

Datis minimo ac maximo progressionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire summam.

Regula hæc est: summa minimi ac maximi termini multiplicetur per dimidium numerum terminorum, productum dabit summam totius progressionis.

Sit exemplum. Quæritur summa omnium campanæ pulsuum alicujus horologii, quod ab 1 hora usque ad 12 inclusive, det pulsus pro horis juxta naturalem numerorum seriem 1, 2, 3, 4, 5 &c., ita ut pro hora 7 septies, pro hora 10 decies, pro 12 duodecies pulset. Minimus terminus est 1, & maximus 12; horum summa 13 ducatur in 6, (dimidium terminorum) productum 78 dat omnes campanæ horariæ pulsus pro horis 12. Cujus duplum dat pulsus horarios integri unius diei.

Ratio deducitur *ex lemm.* 1. Nam cum summa extremorum æqualis sit duobus quibusque terminis æqualiter distantibus, rectangulum factum ex summa primi, & ultimi in numerum dimidium terminorum, necessario æquale erit summæ totius progressionis. Multiplicatio enim est idem ac compendiosa additio ex dictis *Prop.* 5. *Cap.* 1.

Coroll. Hinc infertur, summam progressionis Arithmeticæ pariter haberi, 1. Si dimidium sum-

mæ maximi ac minimi termini ducatur in numerum terminorum. 2. Si summa maximi & minimi ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur. 3. Quia vero in progressione terminorum imparium numerus medius æquatur dimidio summæ maximi ac minimi *ex lem.* 2. hinc sequitur, haberi progressionis summam, si numerus medius ducatur in numerum terminorum imparium.

PROPOSITIO II.

Datis terminis maximo, & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & residuum divide per numerum terminorum unitate minutum, quotus dabit differentiam quæsitam.

In præc. exemplo campanæ horariæ a maximo termino 12 aufer minimum 1, & residuum 11 divide per numerum terminorum unitate minutum, nempe 11; quotus 1 dat differentiam quæsitam.

Ratio desumitur *ex lemm.* 3. Nam 12 continet minimum terminum 1, & præterea toties continet differentiam, quot sunt post terminum 1 usque ad ipsum inclusive 12 termini, qui nimirum sunt 11: proinde, ablato minimo termino, residuum continet toties differentiam, quot sunt progressionis termini minus uno; adeoque diviso residuo

ſiduo per numerum terminorum unitate minutum habetur differentia.

PROPOSITIO III.

Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.

Duc differentiam in numerum terminorum unitate minutum, & producto adde minimum terminum, ſumma dabit maximum.

Sit exemplum. Dux exercitus diſtribuere vult prædam in expugnatione Urbis collectam inter 40 ſtrenuos milites, qui primi arcem occuparunt; hoc pacto, ut ultimo, qui mœnia ſuperavit, dentur aurei 100, penultimo 130, antepenultimo 160, & ſic deinceps: quæritur, quantum retulerit pecuniæ primus. Patet minimum terminum eſſe 100, differentiam 30, & numerum terminorum 40. Duc proinde 30 in 39, & producto 1170 adde minimum terminum 100, habebis maximum 1270, præmium ſcilicet primi militis. Ratio patet *ex lemm. 3., ejuſque Coroll.*



PRO-

PROPOSITIO IV.

Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.

A Maximo aufer minimum, & residuum divide per differentiam, quotus unitate auctus dat numerum terminorum.

Sit exemplum. Empta est multitudo librorum hac conventione, ut minimus liber stet juliis 2, secundus juliis 4, tertius 6 &c., ultimi vero libri pretium fuit juliorum 400, quæritur librorum numerus. Aufer minimum 2 a maximo 400, & residuum 398 divide per differentiam 2, quotus 199 unitate auctus, hoc est 200, est numerus terminorum, seu librorum, qui quæritur.

Similiter artifex de opere perficiendo convenit hoc pacto, ut primo die solvantur sibi asses 20, secundo die asses 25, tertio asses 30, & sic deinceps. Ultimo die, quo opus absolvit, accepit asses 165, quæritur quot dies operi insumpserit. Aufer terminum minimum 20 a maximo 165, & residuum 145 divide per differentiam 5, quotus est 29, qui unitate auctus dat dies 30.

Ratio propositionis desumitur ex *lemm.* 3., ut manifestum est.

PRO-

PROPOSITIO V.

De Numeris Polygonis.

NUmeri *Polygoni* sunt summæ progressionum Arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie Triangulares, si differentia progressionis sit 1: Quadrati, si differentia sit 2 Pentagoni, si 3: Hexagoni, si 4: Heptagoni, si 5 &c. sortiuntur autem hæc nomina a figuris Geometricis, in quas disponi possunt per puncta unitatibus respondentia, ut ex Triangulari *ABC* patet.

A

B . . . . *C*

Progr. Arithm.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Num. Triangulares.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.
Progr. Arithm.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.
Num. Quadrati.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.
Progr. Arithm.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.
Num. Pentagoni.	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.
Progr. Arithm.	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.
Num. Hexagoni.	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.

Latus Polygoni est numerus terminorum progressionis Arithmeticæ, qui summantur, quod quidem tot continet unitates, quot numerus ipse polygonus terminos. Sic latus *BC* polygoni triangu-

angularis *A B C* continet unitates 4, & polygonus numerus 10 summam quatuor terminorum $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Numerus angulorum est, qui indicat quot angulos, seu latera habeat talis in specie polygonus, ex quorum numero determinatur. Sic numerus angulorum in Triangularibus est 3, in Tetragonis 4, in Pentagonis 5 &c. Numerus vero angulorum superat semper duplici unitate differentiam progressionis generatricis, quod notetur. Ex his facile est solvere problemata, quæ sequuntur.

1. Dato latere, & numero angulorum numerum polygonum invenire. Nam esto datum latus 4, & angulorum numerus 3. Jam patet, addendos esse quatuor terminos, cum latus datum unitates quatuor contineat progressionis Arithmeticæ, cujus differentia est 1. Nam angulorum numerus $3 - 2$, dat differentiam 1. Erunt ergo termini addendi $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, qui erit numerus triangularis quæsitus. Sit exemplum, disponere volo in viridario aliquot flores, sive arbores, in forma triangulari, ita ut in uno latere sint arbores 4, quæritur eorum numerus: patet 10. requiri.

2. Dato numero polygono, & angulorum numero, polygoni latus invenire. Sit polygonus datus 51, & angulorum numerus 5. Ex dictis constat differentiam seriei generatricis esse 3, adeoque polygonum datum 51 esse Pentagonum, cui in prima serie numerorum naturalium respondet latus 6. Quod manifestum est, si ejusdem seriei, cujus differentia est 3, termini 6 summentur.

Schol.

Schol. *Si addantur simul numeri polygoni, nempe Triangulares, aut Quadrati, aut Pentagoni &c. summa dat numeros Pyramidales, qui si oriantur ex additione Triangularium, vocantur Pyramidales Triangulares. Si ex additione quadratorum, Pyramidales Quadrati. Sic si addas simul Hexagonos* 1, 6, 15, 28, 45, 66, *&c. invenies numeros Pyramidales Hexagonos* 1, 7, 22, 50, 95, 161 *&c. & sic de aliis.*

De Progressionibus Geometricis.

LEMMA IV.

IN omni progressione Geometrica si terminus quilibet in se ducatur, & productum dividatur per terminum primum progressionis, quotus distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse terminus.

In progressione *A* terminus 8 tertio loco positus, qui duobus locis distat a primo, ducatur in se, & productum 64 dividatur per primum terminum 2, quotus 32 distabit a primo termino locis duplo pluribus, seu quatuor. Nam terminus 32 est tertius proportionalis ad duos terminos 2, & 8, per *Propos.* 10. *Cap.* 6. proinde 32 toties continet 8 (hoc est bis terminum intermedium 16) quoties 8 continet primum 2, nempe

A 2, 4, 8, 16, 32, *&c.*
0. 1. 2. 3. 4.

bis terminum intermedium 4 ; adeoque cum 32 tantundem distet ab ipso 8, quantum 8 a termino primo 2 (duobus scilicet locis) distabit ipse 32 a primo termino locis duplo pluribus, nempe quatuor.

Coroll. Hinc sequitur, quod si cuilibet progressioni Geometricæ subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, facto tamen initio a cyphra, quilibet progressionis terminus, qui producitur per alium in se ductum, & divisum a primo, habeat sub se notam duplo majorem, quam terminus a quo producitur. Sic in superiori exemplo terminus 32 habet sub se notam 4, duplam ejus quam habet 8, ex cujus ductu producitur. Tales enim numeri, qui *exponentes*, *vel indices* progressionis dicuntur, indicant, quantum quisque terminus distet a primo. Locum autem, seu numerum terminorum progressionis indicant unitate minorem. Sic 32, cujus index est 4, est quintus in progressione terminus. Quod notetur.

LEMMA V.

IN omni progressione geometrica si duo quilibet termini in se ducantur, & productum dividatur per primum terminum progressionis, quotus dabit terminum tot locis distantem a primo, quot unitates habent indices duorum illorum terminorum simul additi.

In Progressione Geometrica *B* subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, ut dictum est in *præc. Coroll.* & duo quilibet termini 10 & 40, quo-

quorum indices simul additi dant 4, ducantur inter se, eorumque productum 400 dividatur per primum 5, quotus est 80, cujus index pariter est 4, adeoque quatuor locis distat a primo termino per *Coroll. cit.*

B 5, 10, 20, 40, 80, 160 *&c.*
0. 1. 2. 3. 4. 5.

Coroll. Hinc ad inveniendum quemlibet progressionis datæ terminum, v. g. sextum, multiplicari debent inter se duo termini, eorumque productum divide per primum, ita ut eorum indices additi contineant tot unitates una minus, quot habet terminus quæsitus. Sic ad inveniendum sextum progressionis *B* terminum, ductis inter se 20 & 40 (quorum indices additi dant 5) & producto diviso per 5, quotus 160 erit sextus progressionis terminus, ut patet.

PROPOSITIO IV.

Datis minimo & maximo progressionis Geometricæ terminis, ac denominatore, summam terminorum invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & residuum divide per denominatorem proportionis unitate minutum, additoque quotienti ultimo termino, habebis omnium terminorum summam.

Sit exemplum. Venditur equus eximiæ pul-

chritudinis hoc pacto, ut juxta clavorum numerum, qui in soleis ferreis figendis adhiberi solent, solvatur pro primo clavo 1 assis, pro secundo clavo 2 asses, pro tertio 4, & sic deinceps in proportione dupla. Clavus ultimus importat asses 2147483648. Quæritur assium omnium solvendorum summa.

Aufer minimum terminum 1 ab ultimo, & residuum divide per denominatorem 2 unitate multatum, nempe per 1; & quia unitas non dividit, remanet quotus idem ac residuum 2147483647, cui adde ultimum terminum, fiet totius progressionis summa 4294967295: qui asses si dividantur per 100, erit pretium illius equi scutorum 42949672, & asses 95, *per Schol Prop.* 5. *Cap.* 3.

Ratio deducitur *ex Prop.* 34. *lib.* 9. *Eucl.* Nam in omni finita progressione Geometrica, ut denominator unitate multatus est ad unitatem, ita maximi & minimi differentia (seu maximus terminus, dempto minimo) est ad totam progressionis summam, minus ipsomet maximo termino; ut si fuerit progressio Geometrica in proportione tripla 3, 9, 27, 81, 243, erit denominator 3 unitate multatus, seu 2 ad 1, sicuti 243 — 3, seu 240, ad totam progressionis summam, dempto maximo termino, hoc est ad $3 + 9 + 27 + 81 = 120$; proinde diviso 240 per 2, habetur 120, cui additur ultimus terminus 243, ut habeatur totius progressionis summa 363.

Schol. I. *Progressionis duplæ ab unitate incipientis brevius habetur summa, si duplicetur terminus ultimus, & a duplo auferatur unitas. Sic in priori exemplo duplica ultimum terminum* 2147483648,

ac deme unitatem, residuum dabit summam totius progressionis 4294967295, ut antea. Ratio per se manifesta est, quia denominator unitate multatus est unitas, quæ non dividit; & addere quoto ultimum terminum in hoc casu idem est, ac illum bis sumere; seu duplicare.

Schol. II. *Ex progressione dupla ab* 1 *incipiente* 1, 2; 4, 8, 16 *&c. habentur numeri, qui dicuntur* Perfecti, *qui scilicet omnibus suis partibus aliquotis æquales sunt, ut* 6, 28, 496 *&c. hoc pacto: adduntur ordinatim progressionis duplæ termini, donec eorum summa sit numerus primus, ut* $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. *Tum numerus primus* 3, *vel* 7, *vel* 31 *ducitur in numerum ultimo additum, ex producto oritur numerus perfectus. Sic* $3 \times 2 = 6$, $7 \times 4 = 28$, $31 \times 16 = 496$. *Et sic de aliis, qui pauci sunt, sicuti in natura aliæ res, quæ perfectæ dicuntur. Nam intra decem est* 6, *intra centum est* 28, *intra mille est* 496, *intra dena millia* 8128. *Omnes aut senario, aut octonario terminantur.*



PRO-

PROPOSITIO VII.

Datis aliquot progressionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.

Dati sint aliqui termini Geometricæ progressionis *A*, & inveniendus sit ejusdem terminus v. gr. vigesimus. Hujus index erit 19, nimirum unitate minor numero termini quæsiti, *per Coroll. lemm.* 4. Subscribe terminis datis numeros naturales ab unitate, facto initio a cyphra, *per Cor. cit.*, & duc 80, qui in progressione quintum locum occupat, & distat a primo locis 4, in se ipsum, ejusque productum 6400 divide per primum terminum 5, quotus 1280 distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse 80, hoc est locis 8 *per lemm.* 4.

Eadem ratione duc 1280 in se ipsum, & productum divide per 5, quotus 327680, distabit a primo termino locis duplo pluribus, hoc est 16 *per lemm. cit.* Cum autem index 16 ab indice termini quæsiti 19 differat per defectum 3, duc 327680 per terminum, cujus index sit 4, hoc est per 40, & productum divide per 5, quotus 2621440 erit terminus vigesimus quæsitus.

Nam cum ex constructione terminus 2621440 sit productus ex duobus terminis 327680, & 40, quorum indices sunt 16 & 3, seu 19, & divisus sit per primum terminum 5, distabit tot locis

cis a primo termino, quot unitates habent duorum illorum terminorum indices 16, & 3 *per lemm.* 5. hoc est locis 19; adeoque ejus index erit 19, proinde terminus in progressione vigesimus *per Coroll. lemm.* 4. Quod erat &c.

Coroll. Patet idem esse quærere datæ progressionis terminum 20, ac terminum exponentis, seu indicis 19, unitate minoris termino quæsito.

PROPOSITIO VIII.

Afferuntur nonnullæ Progressionis Geometricæ quæstiones.

1. QUæritur, quantum frumenti ex uno tritici grano haberi possit annis 10, si supponatur ab uno grano produci posse singulis annis grana 100, licet revera multo plura produci soleant.

Illa ergo 100 grana secundo anno producent centies centum grana, nempe 10, 000, & sic deinceps in proportione centupla. Inveniatur hujus progressionis decimus, seu ultimus terminus, qui *per Prop. præc.* erit 10000, 0000, 0000, 0000, 0000, hoc est unitas cum cyphris 20. A quo si auferatur minimus terminus 100, messis primi anni, & residuum dividatur per denominatorem proportionis unitate minutum, hoc est per 99, & addatur quoto ultimus terminus supra inventus, erit omnium granorum summa *per Prop.* 5.

101010101010101010100.

Quam

Quam nec totius Europæ horrea caperent. Ponamus enim ad unam Romanæ libræ unciam requiri grana 600; ad libram unciarum 12 requiruntur grana 7200. Cum autem Romanum (ut vocant) Rubium sit pondo librarum 640, requiruntur ad rubium unum grana 4608000; dividatur per hunc progressionis summa, dabit quotus rubiorum numerum.

2. Rex, cui ex annuo redditu proveniunt ter decies centena millia nummorum argenteorum, statuit ejusmodi redditus alicui ministro locare hoc pacto, ut singulis annis per unum mensem solvat sibi primo die assem 1, secundo die asses 2, tertio vero 4, in proportione dupla diebus 30, quæritur summa solvenda regi.

Inveniatur progressionis duplæ ab 1 incipientis terminus 30 per *Propos. præc.* erit 536870912, qui duplicetur, & a duplo auferatur unitas; erit assium summa 1073741823, per *Schol.* 1. *Propos.* 6. Ex qua resectis ad dexteram duabus notis, habetur nummorum argenteorum summa.

3. Scheramus Indiæ rex proposuit Sessæ Dahir Indo, qui latrunculorum ludum a se inventum illi exposuerat, ut in præmium peteret quantum vellet. Ille vero nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola positum continue duplicaretur, donec ad ultimam 64 perventum fuisset. Levissima regi primum visa res est: sed facto computo ab Arithmeticis, inventum est, neque in ejus regno, neque in toto terrarum Orbe reperiri eam tantam tritici copiam, nempe 18446744073709551615. Hoc patet ex dictis per *Prop.* 6. & 7. *hujus.*

Schol. I.

Schol. I. *Hanc doctrinam qui perceperit, haud mirabitur id, quod sacra historia narrat de multitudine filiorum Israel, qui egressi sunt de Aegypto. Cum enim eo profecti essent non plures, quam 70, ita multiplicati sunt, ut post annos 120, inde exierint ad sexies centena millia bellatorum hominum, præter pueros, senes, ac mulieres.*

Schol. II. *Admirando Geometricæ progressionis duplæ ab* 1 *incipientis usque ad terminos* 124 *inclusive incrementa, quot scilicet scalarum gradibus Romæ ad templum Aracœlitanum ascenditur, prosecutus est integro libro Romæ edito an.* 1652. *Fr. Ludovicus Paris de Monte Fano Min. Observ., in quo tot, ac tam lepida congerit, ut nescias, utrum magis Geometricæ progressionis incrementa, an hominis ingenium, vel otium mireris.*

Schol. III. *De progressione Geometrica infinita per infinitos terminos descendente non loquimur, quod hæc tyronis Arithmetici studium transcendat, & per Analysin ea longe facilius explicetur.*

PROPOSITIO IX.

Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.

COmbinatio rerum fieri dicitur, cum dato certo rerum numero, v. gr. octo alphabeti literis, quæritur quoties illæ bis, ter, vel quater inter se combinari possint: hoc est quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii ex illis fieri.

I. Datæ ſint igitur octo res, ſeu literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, ſcire volo omnes binorum combinationes. Inſtituantur duæ progreſſiones Arithmeticæ naturales deſcendentes, ſubducta unitate a numeris 8 & 2, tot ſcilicet terminorum, quot numerus minor 2 (qui denominator combinationis binariæ dicitur) continet unitates, ut in *A* & *B* factum eſt. Ducantur deinde inter ſe 8 & 7; & productum 56 dividatur per productum 2 X 1, hoc eſt per 2, quotus 28 dat quæſitam binorum multitudinem.

A	*B*
2	8
1	7
2	56 (28

Hoc patet ex ſequenti 8 literarum combinatione.

ab	*ac*	*ad*	*ae*	*af*	*ag*	*ah*
bc	*bd*	*be*	*bf*	*bg*	*bh*	
cd	*ce*	*cf*	*cg*	*ch*		
de	*df*	*dg*	*dh*			
ef	*eg*	*eh*				
fg	*fh*					
gh						

II. Scire volo quot ternorum combinationes ex iiſdem 8 literis haberi poſſint. Inſtituantur, ut ſupra factum eſt, duæ progreſſiones Arithmeticæ deſcendentes *C* & *D*, & productum 336 dividatur per productum 6, quotus 56 dat numerum ternorum, qui petitur.

C	*D*
3	8
2	7
1	6
6	336

Coroll.

Corol. Eadem methodo inveniuntur omnes quaternarii, quinarii, ſenarii &c. ex dato numero. Proinde in ludo Romano, qui vulgo *Lotto* dicitur, in quo puellarum 90 nomina in urnulam mittuntur, ut inde quinque tantum ſortito extrahantur, binarii *per hanc Propoſ.* inventi erunt 4005, ternarii 117480, quaternarii 2555190, quinarii 43949268: unde difficillima in hujuſmodi ludis divinandi ratio ſatis apparet.

PROPOSITIO X.

Ex dato rerum numero permutationes omnes poſsibiles invenire.

PErmutatio diſtinguitur a combinatione in hoc, quod combinatio, dato rerum numero, oſtendit quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii &c. ex eo rerum numero fieri poſſint, ut ex *Prop. præc.* manifeſtum eſt. Permutatio vero docet, quoties datæ illæ quantitates permutari queant, ita ut ſemper omnes accipiantur, variato ſolum ordine. En regula

Sumantur tot numeri in ſerie naturali 1, 2, 3, 4 &c. quot ſunt res datæ, v. g. quinque literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, productum ex terminis ſeriei naturalis invicem multiplicatis erit numerus permutationum quæſitus, ut in *A* & *B* patet. Nam ſi dentur duæ tantum literæ *a*, *b*, poſſunt bis permutari, ſi qualibet ſemel primum locum, vel ſecundum occupet, *ab*, *ba*. Si vero dentur tres

A	*B*
1	*a*
2	*b*
3	*c*
4	*d*
5	*e*
120	

a, *b*, *c*, permutari possunt sexies. Quælibet enim occupare potest semel unum locum, & reliquæ duæ, ut modo dictum est, bis permutari. Nam cum *c* tenet ultimum locum, possunt duæ reliquæ *a*, *b*, mutari bis, ac proinde habentur duo diversi ordines *abc*, *bac*. Rursus *b* occupante ultimum locum, permutari possunt bis duæ *a*, *c*; & sic duo novi exurgunt ordines *acb*, *cab*. Denique si *a* teneat ultimum locum, reliquæ dua *c*, *b* bis permutari queunt, unde rursus alii duo habentur ordines *bca*, *cba*. En simul omnes trium literarum *a*, *b*, *c* permutationes.

abc, *acb*, *bca*,
bac, *cab*, *cba*,

Eodem discursu ostenditur literas quatuor *a*, *b*, *c*, *d*, permutationes 24 admittere, literas quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e* permutationes 120 &c.

Corol. I. Hinc patet celebre illud carmen in honorem B. M. V.

Tot tibi Virgo dotes, quot sydera Cælo.

octo verbis constans, subire posse permutationes 40320, non tamen semper metri ratione servata.

Coroll. II. Hinc quoque habentur omnia dati nominis Anagrammata, seu quot modis, variato ordine, disponi possint alicujus vocabuli literæ, ut *Roma*; cujus anagrammata sunt *Amor*, *Mora*, *Maro*, *Ramo*, *Armo*, &c. quæ olim ex depravato ejus ætatis gustu literatores in deliciis habebant.

PROPOSITIO XI.

Proponuntur aliqua Permutationum problemata.

I. SUnt Convictores 12, qui commmi mensa utuntur, & quotidie singuli accumbendi locum variant, quæritur, quot annis absolvetur isthæc locorum permutatio.

Ductis invicem 12 progressionis naturalis Arithmeticæ numeris 1, 2, 3 &c. invenietur *per Propos. præc.* permutationes 479, 001, 600, quas si dividas per dies 365 habebis annorum summam.

2. Facta literarum 24 alphabeti permutatione, quæritur, quot annorum millia necessaria erunt ad omnes ejusmodi permutationes scribendas, etiamsi mille scriptores existant, qui quotidie paginas 40 scribant, & unaquæque contineat permutationes 50.

Inveniatur *per Propos. præc.* permutationum summa ex literis 24, quæ ex Tacquet est 620, 448, 401, 733, 239, 439, 360, 000. Duc 40 X 50 X 1000, productum 2000000 dat numerum permutationum singulis diebus scribendum, quem duc in dies 365, & per productum divide prædictam permutationum summam, quotus dabit numerum annorum quæsitum.

3. Ex doctrina B. Alberti Magni de Angelorum numero, Angelorum ordines, seu chori sunt 9: quilibet chorus continet 6666 legiones, & legio

gio quælibet Angelos *6666*, proinde omnium Angelorum numerus est *399*, *920*, *004*; quæritur quot fieri possint Angelorum permutationes, seu quot modis ordinem inter se variare queant. In hoc tam infinitæ multitudinis numero percipiendo, imbecilla mens hominum deficit.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.

1. Ducatur primus Arithmetice proportionalis datus in secundum, productum erit primus proportionalis Harmonice.

2. Ducatur idem primus Arithmetice proportionalis in tertium, proveniet secundus Harmonicus.

3. Denique secundus Arithmeticus in tertium ductus tertium Harmonicum producet.

Sit exempl. Proportio Arithmetica	2, 3, 4;
efficit Harmonicam	*6*, 8, 12.

Similiter proportio Arithmetica	3, 7, 11;
efficit Harmonicam	21, 33, 77.



PRO-

PROPOSITIO XIII.

Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.

DUC primum numerum datum in secundum, & productum divide per duplum primi minutum secundo, hoc est per differentiam dupli primi a secundo, quotus erit tertius harmonice proportionalis.

Dati sint 3 & 4, quæritur tertius in eadem ratione harmonica. Duc 3 X 4, & productum 12 divide per 6 — 4, hoc est per 2, quotus 6 dat numerum quæsitum. Similiter dati sint 6 & 8, quæritur tertius harmonicus. Duc 6 X 8, & productum 48 divide per 12 — 8, seu 4, quotus 12 est tertius harmonice proportionalis, ut patet ex dictis.

Quod si primi termini duplum sit æquale, vel minus secundo termino, tunc tertius harmonice proportionalis inveniri non poterit; ut si dentur 3 & 6, vel 2 & 6.

PROPOSITIO XIV.

Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.

DAtus sit numerus ex. gr. 60, qui dividatur per numeros Arithmetice proportionales 1, 2, 3,

2, 3, 4, 5, 6, erunt quoti 60, 30, 20, 15, 12, 10: quos esse in proportione harmonica manifestum est. Nam

60. 20 :: 60—30. 30—20.
30. 15 :: 30—20. 20—15.
20. 12 :: 20—15. 15—12.
15. 10 :: 15—12. 12—10.

Hinc patet haberi progressionem terminorum harmonice proportionalium.

Schol. I. *Harum trium propositionum demonstrationes ad Analysin speciosam remittimus, unde facillime eruuntur, quæ alioquin per viam syntheticam sunt operosæ.*

Schol. II. *Ratio autem cur tales numeri proportionem harmonicam, seu Musicam constituere dicantur, est nimirum quia consonantias Musicas constituunt. Sic in numeris harmonice proportionalibus* 3, 4, 6 *inter* 6 *&* 4 *est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ* Diapente, *seu* Quinta *dicitur. Item inter* 4 *&* 3 *est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam* Diatesseron, *seu* Quartam *vocant. Deinde inter extremos* 6 *&* 3 *habetur proportio dupla, quæ* Diapason, *seu* Octavam *consonantiam efficit.*

Schol. III. *Datur etiam proportio* Contr-harmonica, *quæ habetur cum datis tribus terminis differentia primi, & secundi est ad differentiam secundi & tertii, ut tertius terminus ad primum. Sic* 3, 5, 6 *sunt numeri contrharmonice proportionales: nam* 2, *differentia primi & secundi termini,*

mini, est ad 1, differentiam secundi & tertii, ut 6 ad 3. Item 12, 10, 6 sunt contrharmonice proportionales; nam 2. 4 : : 6. 12. Hæc dicta sint in gratiam eorum, qui musicam amant, aut instrumentis Musicis student, ut hinc numerorum scientiam sibi maxime necessariam intelligant.

CAPUT VIII.

De Logarithmis, eorumque natura, atque usu.

CUM triangulorum resolutio, quæ per sinus, tangentes, & secantes habetur, absolvi debeat per regulam Proportionum. in qua multiplicatio, & divisio, ob numeros septem, vel octo characteribus constantes, multum laboris, & tædii importare solet; hinc est, quod Joannes Neperus Scotus, vir nunquam satis laudandus, alios numeros pro sinibus, tangentibus, & secantibus excogitavit, & ann. 1620 promulgavit, quorum ope sola additio præstat omne id, quod præstare solebat multiplicatio, & subtractio idem efficit, quod divisio. Tales numeri vocantur *Logarithmi*, quorum naturam, proprietates, & usum hic brevissime explicamus.

LEMMATA.

I. IN progressione Arithmetica quatuor terminorum summa duorum extremorum æquatur mediorum summæ. Sint quatuor termini dati 1, 2, 3, 4; erit 4 + 1 = 2 + 3.

Coroll. I. Hinc ut habeatur quartus Arithmetice proportionalis, ex summa secundi, & tertii termini aufertur terminus primus, residuum dat quartum Arithmetice proportionalem quæsitum.

II. In progressione Arithmetica trium terminorum, summa duorum extremorum æquatur duplo termini medii. Dati sint 2, 5, 8, erit 2 + 8 = 10.

Coroll. I. Hinc datis duobus terminis Arithmetice proportionalibus, ut habeatur tertius, ex duplo secundi aufertur primus. Sic 10 — 2 = 8.

Coroll. II. Inter duos datos numeros medius Arithmetice proportionalis habetur, si accipiatur eorum summæ semissis. Sint dati 2 & 8, eorum summæ semissis 5 est medius Arithmetice proportionalis, ut patet.

PROPOSITIO I.

De natura Log-morum, eorumque inventione.

L*Og-mi* sunt numeri Arithmetice proportionales adjuncti, seu respondentes numeris Geometrice proportionalibus: vel sunt numeri, qui Arithmeticam, ubi ii, quorum isti sunt Log-mi, Geo-

Geometricam servant proportionem. Ut si concipiatur series quæcunque numerorum Geometricè proportionalium, ut in *A*, cui respondeat alia series numerorum Arithmetice proportionalium *B*, vel *C*, vel *D*, qui crescant ut in *B* & *C*, vel decrescant, ut in *D*; omnes hi numeri *B*, C, *D* dicuntur Log-mi numerorum in *A* existentium,

A	*B*	*C*	*D*	*M*	*N*
1	1	3	100	1	0. 0000000
2	2	5	90	10	1. 0000000
4	3	7	80	100	2. 0000000
8	4	9	70	1000	3. 0000000
16	5	11	60	10000	4. 0000000
32	6	13	50	100000	5. 0000000
64	7	15	40	1000000	6. 0000000
128	8	17	30	10000000	7. 0000000
256	9	19	20	100000000	8. 0000000
512	10	21	10	1000000000	9. 0000000
1024	11	23	0	10000000000	10.0000000

Quamvis autem Log-morum species possit assumi ad libitum, ut diximus, præstantissima tamen, & commodissima est illa, quæ cyphram, seu o ponit pro Log-mo unitatis, & unitatem cum aliquibus cyphris, nempe 8, vel septem pro Log-mo numeri denarii, ut vides in *M* & *N*. Adduntur numeris in progressione Arithmetica procedentibus, seu Log-mis illæ cyphræ, ut Log-mi magis exacti habeantur, ut dicitur in Trigonometria de sinu toto respectu sinuum, tangentium, & secantium, utque calculus facilior evadat,

Coroll. I. Ex eo quod Log-mus unitatis sit o; sequitur Log-mum numeri, qui sit minor unitate, ut sunt fractiones, minorem esse quam o, qui proinde dicitur Log-mus *defectivus*, & designatur nota —

Corol. II. Omnes Log-mi numerorum ab 1 ad 10 exclusive habent o pro prima nota; qui sunt inter 10, & 100 habent pro primo numero 1; qui vero sunt inter 100, & 1000 habent pro primo termino numerum 2, qui inter 1000, & 10000 habent 3 pro primo termino, & sic deinceps. Hi numeri initiales 1, 2, 3, 4, 5, &c. dicuntur *characteristici*, sive *indicativi*: nam indicant quot figuris constat numerus absolutus, cujus sunt Log-mus, & puncto ab aliis separantur.

Coroll. III. Characteristica semper unitate minor est numero figurarum numeri absoluti. Hinc dato quovis numero absoluto v. g. 82050 quinque figurarum, statim intelligitur ejus Log-mo deberi 4 pro characteristica, & sic de aliis.

PROPOSITIO II.

Si Log-mus unitatis sit o, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.

SIT factum 24, cujus factores sunt 4 & 6, erunt quatuor termini Geometrice proportionales, *ex Defin. multiplicat.*, 1 . 4 :: 6 . 24, eorumque Log-mi erunt in proportione Arithmetica, *ex Prop.* 1. Sed Log-mi extremorum 1, 24,

æquan-

æquantur Log mis 4, 6, *per lem.* 1. Log-mus autem unitatis ex hypothesi est o; ergo si Log-mus unitatis sit o, Log-mus facti æquatur summæ ex Log-mis efficientium 4 & 6. Quod &c.

Coroll. I. Hinc sequitur, Log-mum numeri compositi plani, seu solidi æqualem esse aggregato ex Log-mis laterum tale planum, vel solidum efficientium. Sic Log-mus 72 æquatur summæ Log-morum 3 & 24, aut 6 & 12, aut 8 & 9, vel 3, 4 & 6, vel etiam 2, 3 & 12, ex quibus omnibus consurgit numerus 72.

Coroll. II. Sequitur etiam, Log-mum numeri quadrati duplum esse Log-mi ejus radicis, & Log-mum cubi triplum Log-mi suæ radicis: nam factores quadrati, & cubi sunt idem numerus bis, vel ter sumptus.

Coroll. III. Si Log-mum dignitatis cujuscunque x^2, x^3, x^4 &c. dividas per exponentem talis dignitatis, nempe per 2, vel 3, vel 4 &c. habebis Log-mum radicis ejusdem dignitatis. Contra si Log-mum datæ radicis multiplices per exponentem alicujus dignitatis, habebis Log-mum ejusdem dignitatis. Sit $x^3 = 8$, ejusque Log.mus ex tabulis 0.9030900: divide per exponentem 3 hunc Log-mum, quotus 0.3010300 erit Log-mus respondens radici 2; si vero Log-mum 0.3010300 multiplices per exponentem 3, habebis 0.9030900 Log-mum dignitatis x^3, seu cubi 8.

PRO-

PROPOSITIO III.

Si Log-mus unitatis est o, *differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mo quoti eorundem numerorum.*

Sint duo numeri 24 & 6, & differentia eorum Log-morum sit 0.6020600, dico hanc esse Log-mum quoti eorumdem, nempe 4. Nam cum sit divisor ad dividendum, *ex Defin. divis.*, ut unitas ad quotum, erunt quatuor termini Geometrice proportionales 6. 24 :. 1. 4, eorumque Log-mi in proportione Arithmetica; ergo *per lem. 1. hujus*, Log-mi numerorum 24, & 1 æquantur Log-mis extremorum 4 & 6; sed ex hypothesi Log-mus unitatis est o, ergo si ex Log-mo numeri 24 auferatur Log-mus divisoris 6, Log-mus residuus, seu differentia Log-morum 24 & 6, erit æqualis Log-mo quoti, nempe 0.6020600, qui respondet numero 4, nempe quoto. Quod &c.

Coroll. Hinc habetur, summam Log-morum divisoris, & quoti æqualem esse Log-mo dividendi.

PROPOSITIO IV.

Numeri cujuscunque Log-mum invenire.

Inveniendus sit Log-mus numeri 7. Statuatur progressio Geometrica 1, 10, 100, 1000 &c. & assumantur Log-mi his terminis respondentes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, 3.0000000 &c.

eo

eo modo, quo dictum est *in Propos.* 1. *hujus*. Deinde unitatem *A*, & denarium *B* auge tot cyphris, quot placuerit, ut 7, 8, 9 &c. (hic cyphræ 6 adduntur) & inter *A* & *B* inveniatur medius proportionalis Geometricus C, *per Propos.* XXI. *Cap.* 6. *Arithm.* erit hic minor numero septenario, qui etiam intelligi debet auctus tot cyphris, quot aucta fuit unitas, nempe sex. Inveniatur ergo inter *C* minorem, & *B* majorem alius Geometrice proportionalis *D*, *per Prop. cit.*, qui pariter cum sit minor, quam 7. 000000, poterit inter ipsum *D* minorem, & *B* majorem inveniri medius Geometrice proportionalis *E*, nempe 7.498942, qui major est ipso 7.000000; ideo-

A	1.000000	0.0000000
C	3.162278	0.5000000
B	10.000000	1.0000000
—	——.—	——.—
C	3.162278	0.5000000
D	5.623413	0.7500000
B	10.000000	1.0000000
—	——.—	——.—
D	5.623413	0.7500000
E	7.498942	0.8750000
B	10.000000	1.0000000
—	——.—	——.—
D	5.623413	0.7500000
F	6.493816	0.8125000
E	7.498942	0.8750000
—	——.—	——.—
F	6.493816	0.8125000
G	6.978306	0.8437500
E	7.498942	0.8750000
—	——.—	——.—
G	6.978306	0.8437500
H	7.233942	0.8593750
E	7.498942	0.8750000
—	——.—	——.—
G	6.978306	0.8437500
I	7.104974	0.8515625
H	7.233942	0.8593750
—	——.—	——.—
G	6.978306	0.8437500
K	7.041355	0.8476562
I	7.104974	0.8515625
—	——.—	——.—
G	6.978306	0.8437500
I.	7.009760	0.8457031
K	7.041355	0.8476562

ideoque inter ipſum *E*, & proxime minorem *D* inveniatur medius Geometrice proportionalis *F*, qui minor eſt ipſo *E*; proinde inter *F* & *E* inveniri poteſt medius *G*, qui adhuc minor eſt ipſo *E*. Atque eadem ratione inquirendo inter proxime majorem, & proxime minorem, inveniuntur medii Geometrice proportionales *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* &c. donec tandem occurrat medius proportionalis *Z* = 7.000000, qui nullo penitus exceſſu, vel defectu differt ab ipſo numero ſeptenario.

Deinde ſicuti inter *A* & *B* inventus fuit medius Geometrice proportionalis *C*, ſic inter eorum Log-mos inveniatur me-

G	6.978306	0.8437500
M	6.994015	0.8447266
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
N	7.001883	0.8452148
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
O	6.997936	0.8449707
N	7.001883	0.8452148
O	6.997936	0.8449707
P	6.999915	0.8450928
N	7.001883	0.8452148
P	6.999915	0.8450928
Q	7.000899	0.8451538
N	7.001883	0.8452148
P	6.999915	0.8450928
R	7.000407	0.8451233
Q	7.000899	0.8451538
P	6.999915	0.8450928
S	7.000161	0.8451080
R	7.000407	0.8451233
P	6.999915	0.8450928
T	7.000038	0.8451004
S	7.000161	0.8451080
P	6.999915	0.8450928
V	6.999977	0.8450966
T	7.000038	0.8451004
V	6.999977	0.8450966
X	6.000007	0.8450985

medius Arithmetice proportionalis, *per Coroll.* 2. *lemm.* 2., nempe 0. 5000000. Erit hic Log-mus ipsius numeri C. Eodem modo reperiri debent omnes alii Log-mi mediis Geometrice proportionalibus *D*, *E*, *F*, *G* &c. respondentes: quo facto, habebis Log-mum numeri dati 7, nimirum 0.8450980.

T	7.000038	0.8451004
V	6.999977	0.8450966
Y	6.999992	0.8450975
X	7.000007	0.8450985
Y	6.999992	0.8450975
Z	7.000000	0.8450980
X	7.000007	0.8450985

Coroll. Hac methodo inveniuntur Log-mi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 &c. Suppetunt tamen modi, quibus tantus labor imminuitur. Nam invento Log-mo numeri v. g. 6. si hunc dividas, semissis dat Log-mum numeri 3, *per Coroll.* 2 & 3. *Propos.* 2 *hujus*. Item invento Log-mo numeri 6, habetur Log-us numeri 2, nam si dividas 6 per 3, quotus est 2; subtracto igitur Log-mo numeri 3 a Log-mo numeri 6, residuum dat Log-mum quoti 2, *per Prop.* 3. *hujus*. Pariter subtrahendo Log-um numeri 2 modo inventum a Log-mo numeri 10, habetur Log-us quoti 5, *per Prop.* 3. *cit.*, & sic proportionaliter de aliis.

Corol. Inventis Log-mis numerorum primorum, facile habentur Log-mi numerorum compositorum. Nam si Log-um binarii duples, triples, quadruples &c. habebis Log-mos totius seriei 2, 4, 8, 16, 32, &c. si idem facies cum Log-mo ternarii, habebis seriem Log-morum pro numeris 3,

9, 27, 81, 243 &c. Immo cum omnis numerus compositus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum Log-mi supponuntur jam cogniti; si addas eorum Log-mos, habebis Log-mos omnium numerorum compositorum *per Prop.* 2. *hujus*. Hinc omnes numeri in ratione decupla eundem habent Log-um, præter characteristicam, ut vides in *A* & *B*.

	A		*B*
1	0.0000000	3	0.4771212
10	1.0000000	30	1.4771212
100	2.0000000	300	2.4771212
1000	3.0000000	3000	3.4771212

Schol. I. *Canonem Log-morum pro numeris naturalibus, seu absolutis ob* 1 *usque ad* 20000, *&* *a* 90000 *usque ad* 100000 *primus construxit Henricus Briggius Anglus in Academia Oxoniensi ex consilio Jo: Neperi primi horum inventoris. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox implevit Adrianus Ulacq. In tabellis tamen vulgaribus habetur tantum canon Log-morum pro numeris ab* 1 *usque ad* 10000.

PROPOSITIO V.

Multiplicare duos numeros, qui minores sint quam 10000.

Sint multiplicandi inter se duo numeri 144, & 64, quorum Log-i ex tabulis 2.1583625, & 1.8061800

1.8061800, quæritur factum. Adde simul duos Log-mos inventos, summa dabit Log-mum 3.9645425, cui in tabulis respondet numerus 9216 pro facto duorum numerorum 144, & 64.

Demonst. patet ex *Prop.* 2. *hujus*.

Schol. *Si summa duorum Logarithmorum superet* 4.0000000, *qui est maximus communium tabularum Log-mus, operandum erit, ut inferius docebimus*.

PROPOSITIO VI.

Numerum integrum minorem, quam 10000 *per alium dividere*.

SIt numerus dividendus 9216, cujus Log-mus ex tabulis est 3.9645425. Divisor sit 64, cujus Log-mus est 1.8061800, quæritur quotus. E Log-mo dividendi subtrahe Log-mum divisoris, Log-mus residuus, nempe 2.1583625, in tabulis quæsitus dat quotum 144.

Demonst. patet ex *Prop.* 3. *hujus*

Schol. *Cum Log-mus ille residuus non invenitur in tabulis præcise, signum est, quoto minutiam aliquam adhærere, quæ quanta sit, reperietur, ut mox docebimus*.



PROPOSITIO VII.

Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire.

SInt dati tres numeri 4, 68, & 3, quæritur quartus proportionalis. Log-mus secundi addatur Log-mo tertii, & a summa subtrahatur Log-mus primi, Log-us residuus dat in tabulis numerum quæsitum.

Demonst. patet ex *lemm.* 1.

PROPOSITIO VIII.

Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, sed numerum 10,000,000 non excedentibus.

SIT numerus datus 923754, cujus Log-mus quæritur.

1. Quære ex tabulis Log-mum quatuor primarum figurarum 9237, & ex residuis figuris fiat fractio, cujus denominator erit 1, cum tot cyphris, quot sunt ipsæ figuræ residuæ, nempe $\frac{54}{100}$.

2. Log-mus jam inventus subtrahatur a Log-mo proxime sequenti, nempe a Log-mo numeri 9238.

Num. 9238, *Log.* 3.9655779
Num. 9237, *Log.* 3.9655309

Diff. Log. —— 470

3. Dic

3. Dic jam per regulam Proportionum, ut fractionis denominator 100 ad numeratorem 54, ita differentia Log-morum 470 ad quartum proportionalem 253 $\frac{80}{100}$.

4. Adde 253 (fractio negligi potest) Log-mo primum invento, fiet Log-mus 3.9655562.

5. Tandem characteristica tot unitatibus augeatur, quot sunt cyphræ in divisore (ut hic 2) erit Log-mus quæsitus 5.9655562.

Demonstr. Certum est, quod si numerus 9237 cresceret integra unitate, ejus Log-mus augeri deberet partibus 470, qualis est differentia duorum Log-morum se integra unitate superantium: sed crescit tantum $\frac{54}{100}$, nam divisus per 100, quotus est 9237 $\frac{54}{100}$; ergo per regulam proportionum inquirendum est, quantum augeri debeat Log-mus ejusdem numeri 9237 ratione earum partium $\frac{54}{100}$, quæ quidem minus sunt, quam integra unitas, seu $\frac{100}{100}$. Instituta itaque regula proportionum, invenitur Log-mum primo inventum, nempe 3.9655309, augendum esse partibus 253, fitque Logarithmus 3.9655562 pro numero 9237 $\frac{54}{100}$.

Demum characteristica 3 augeri debet tot unitatibus, quot cyphræ fuerunt in divisore (ut hic 2) ob divisorem 100. Nam numerus datus cum divisus sit per 100, est numerus quotus: sed *per Coroll. Prop. 3. hujus*, summa Log-morum divisoris & quoti æqualis est Log-mo dividendi; ergo ut habeatur Log-mus dividendi 923754, addi debet Log-mo quoti 3.9655562 Log-mus divisoris 100, nempe 2.000000, quod, ut compendiosius

diosius fiat, satis est augere characteristicam duabus unitatibus, ut patet.

Coroll. I. Si daretur numerus major, quam 10, 000,000 (quod in praxi vix contingit) hæc regula non sufficeret. Nam crescentibus numeris absolutis, differentiæ Logarithmorum decrescunt, ita ut tandem evanescant, & fiant omnino æquales ipsi Logarithmi. Sic numeri 2656385774, & 2656385775, qui unitate differunt, habent eundem omnino Log-mum 94242911, ut ex tabulis majoribus Briggii apparet. Ideoque institui non posset regula proportionum, cum desit differentia Log-morum.

Coroll. II. Si numeri maximi non valde differunt, eorum Log-mi supputati ad denarii Logmum 1.0000000, ut in tabulis communibus factum est, sunt inter se æquales. Quapropter si daretur numerus quindecim, aut viginti figurarum, vel amplius, sufficeret pro ejus Log-mo sumere Log-um primarum decem figurarum, quod notasse valde utile erit.

Schol. *Si numerus datus dividi potest per quoscunque numeros, ita ut nihil remaneat, & fiat minor quam* 10000, *summa Log-morum divisoris & quoti dat Log mum numeri dati. Sit numerus datus* 12456, *divide per* 3 *fit* 4152, *adde simul Log-mos numeri* 3, *nempe* 0.4771212, *& Logmum numeri* 4152, *nempe* 3.6182573, *summa* 4.0953785 *dat Log-mum dati numeri.*

Similiter sit numerus datus 98796, *divide per* 2 *fit* 49398, *& hunc iterum per* 2 *fit* 24699, *& hunc per* 3 *fit* 8233, *qui minor est quam* 10000;

10000; *adde ſimul Log-mos omnium diviſorum* 2, 2, 3, *ſeu* (*idem enim eſt*) per Cor. 1. Prop. 2. hujus, *ſume Log-mum numeri ſolidi compoſiti ex* 2, 2, 3, *ideſt* 12, *qui eſt* 1.0791812, *cui adde Logarithmum ultimi quoti, nempe* 8233, *qui eſt* 3.9155581: *ſumma* 4.9947393 *eſt Log-mus dati numeri* 98796.

PROPOSITIO IX.

Datæ fractionis Log-mum invenire.

1. SUbtrahe Log-mum numeratoris e Log-mo denominatoris, & reſiduo Log-mo præpone ſignum ſubtractionis. Sit inveniendus Log-mus fractionis $\frac{2}{5}$.

$$\begin{array}{l} Log.\ 5. = 0.6989700 \\ Log.\ 2. = 0.3010300 \\ \hline Log.\ \frac{2}{5} = -0.3979400 \end{array}$$

2. Si fractionis datæ numerator ſit major denominatore, ut $\frac{9}{5}$ ſubtrahe Log-mum denominatoris a Log-mo numeratoris; reſiduum dat Log-mum quæſitum.

$$\begin{array}{l} Log.\ 9. = 0.9542425 \\ Log.\ 5. = 0.6989700 \\ \hline Log.\ \frac{9}{5} = \quad 2552725 \end{array}$$

3. Si vero fractio data integris adhæreat, integra

tegra reducantur in unam fractione m, & eodem modo habebitur Log-mus, ut $3\frac{2}{7}$ fiant $\frac{23}{7}$, erit

$$Log.\ 23 = 1.3617278$$
$$Log.\ 7 = 0.8450980$$
$$Log.\ 3\tfrac{2}{7} = 0.5166298$$

Similiter quæritur Log-m us numeri $354\frac{3}{4}$, reduc numerum datum ad fractionem, erit $\frac{1419}{4}$, & aufer Log-mum numeri 4 ex Log-mo numeri 1419, proveniet Logarithmus quæsitus.

$$Log.\ 1419 = 3.1519824$$
$$Log.\ 4 = 0.6020600$$
$$Log.\ \tfrac{1419}{4} = 2.5499224$$

Ratio regulæ est, quia cum fractio sit quotus proveniens ex divisione numeratoris per denominatorem, Log-mus talis quoti est æqualis, *per Prop.* 3. *hujus*, differentiæ Log-morum divisoris & dividendi, ideſt numeratoris & denominatoris, ideoque ubi numerator minor est denominatore, ac proinde per eum dividi non poteſt, Log-mus major e minori subtrahendus eſt: quo in casu differentia evadit negativa, & præponitur Log-mis signum negativum —. Quod &c.

Log-mus integri cum fracto poteſt enim haberi sic. Sit numerus datus $3560\frac{1}{4}$, sume differentiam Log-morum numeri 3560, & numeri 3561 proxime sequentis, cujus prioris numeri Log-mus

eſt

est 3.5514500 ; secundi numeri est 3.5515720 , differentia erit 1220 . Dic jam per regulam proportionum , ut 4 ad 3 , ita 1220 ad 915 . Adde 915 ad Log-um numeri 3560 , nempe 3.5514500 , habebis Logarithmum integri cum fractione , sc. 3.5515415 . Quod &c.

PROPOSITIO X.

Dato Log-mo , qui in tabulis accurate non existit , invenire numerum ei respondentem.

SI Characteristica dati Log-mi sit 0 , vel 1 , vel 2 , mutetur in 3 , & quæratur inter 1000 , & 10000 Log-mus , qui sit proxime minor Log-mo dato , habebitur numerus quæsitus , tot fractiones decimales adjunctas habens , quot unitates Characteristicæ accesserunt .

Sit datus Log-mus 1.9201662 , qui non reperitur exacte in tabulis , Characteristica 1 fiat 3 , erit 3.9201662 . Quære hunc inter 1000 , & 10000 , invenies numerum 8320 respondentem Log-mo 3.9201233 , qui est proxime minor Log-mo dato , ut patet . Numerus ergo quæsitus erit 83 $\frac{20}{100}$, ob duas videlicet unitates , quibus aucta fuit Characteristica .

Si Log-mus datus habeat Characteristicam 3 , & non reperiatur accurate in tabulis , ut Log-us 3.5163954 , erit hæc regula.

1. Sume numerum 3283 respondentem Logarith-

mo 3.5162709, qui est proxime minor Log-mo dato.

2. Subtrahe hunc Log-mum a proxime sequenti 3.5164031, & fiet differentia prima 1322.

3. Idem Log-mus proxime minor Log-mo dato auferatur ab ipsomet Log-mo dato, erit secunda differentia 1245.

4. Fiat ut prima differentia 1322 ad secundam 1245, ita denominator futuræ fractionis ad libitum assumptus 100, 1000 &c. ad quartum proportionalem, qui erit numerator fractionis, nempe 94. erit ergo numerus quæsitus Log-mi dati $1283 \frac{94}{100}$.

Demonstr. Eodem fere modo, quo *Prop.* 8. *hujus*. Nam differentia Log-morum prima est differentia unitatis, quæ ita se habet ad differentiam secundam, Log-mi scilicet dati, & proxime minoris, ut 100 ad quartum proportionalem 94. Sed nota, quod ideo inquiritur Log-mus datus inter 1000, & 10000, quia, ut diximus, ibi Logarithmorum differentiæ sunt minores, ac proinde, quæ capienda est pars proportionalis, ibi exactior habetur.

Schol. *Ubi tamen in minimis scrupulosi non sumus, ad praxim satis est sumere numerum respondentem Log-mo proxime minori, & fractiones ejusmodi negligere.*



PRO-

PROPOSITIO XI.

Dato Logarithmo defectivo, numerum ei respondentem invenire.

SIt datus Log-mus defectivus — 0.2218488, quæritur fractio, quæ ei respondeat.

1. Sume quemlibet denominatorem 100, vel 1000, vel 10000, e cujus Log-mo 2.0000000, vel 3.0000000, vel 4.0000000 subtrahe datum Log-mum defectivum.

2. Quære in tabulis numerum respondentem Log-mo residuo 2.7781512, qui dat 600 pro numeratore quæsitæ fractionis; habes ergo $\frac{600}{1000}$, seu $\frac{3}{5}$.

Log. num. 1000 = 3.0000000
Log. def. = - 0.2218488

Log. res. = 2.7781512, *qui dat* 600
Est ergo $\frac{600}{1000}$, *seu* $\frac{3}{5}$.

Similiter sit Log-mus defectivus — 0.3679767, quem subtrahe ex 4.0000000, residuum 3.6320233 in tabulis quæsitum dat 4285 pro numeratore fractionis. Habes ergo $\frac{4285}{10000}$.

Log. num. 10000 = 4.0000000
Log. def. = - 0.3679767

Log. resid. = 3.6320233, *dat* 4285 *proxime*
Est ergo $\frac{4285}{10000} = \frac{857}{2000}$.

Demonstr. ut Propos. 9.

PROPOSITIO XII.

Dato Log-mo excedente Log-mum 4.0000000 numerum ei congruum invenire.

1. A Dato Log-mo auferatur Log-mus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ut scilicet residuum sit proxime minus Log-mo 4.0000000, qui est tabularum maximus.

2. Quæratur ex tabulis numerus conveniens huic residuo.

3. Numerus inventus multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, per eum nempe numerum, cujus Log-mus ablatus fuit a Log-mo dato; factum est numerus quæsitus.

Sit inveniendus numerus dati Log-mi 7.8372413 ex hoc aufer Log-mum numeri 10000, hoc est 4.0000000, relinquetur Log-mus 3.8372413, cui ex tabulis respondet numerus 6874 cum fractione $\frac{5032}{10000}$, *per Prop.* 10. Hunc multiplica per 10000, fit numerus quæsitus 68745032.

Log. 7.8372413
Log. 4.0000000
Log. 3.8372413, *qui dat* 6874 $\frac{5032}{10000}$

Duc in 10000, *fit* 68745032.

Similiter sit datus Log-mus 8.2718416, ex quo aufer Logarithmum 4.0000000; remanet 4.2718416, qui adhuc major est, quam 4.0000000. E resi-

E residuo igitur Log-mo 4.2718416 rursus aufer 1.0000000, remanet 3.2718416, cui ex tabulis respondet numerus 1870, quem multiplica per 10000, & ulterius per 10, factum 187000000 erit numerus quæsitus.

Demonstr. Subducere Log-mum numeri 10; 100, 1000 &c. a Log-mo dato, est idem ac numerum quæsitum dividere per 10, vel 100, vel 1000 &c. erit ergo divisor 10, vel 100 &c. ad dividendum, quem voco Z, ut unitas ad quotum; ergo *per Prop. 3. hujus*, differentia Logmorum divisoris, & dividendi, (hoc est in secundo exemplo Log-mus 3.2718416) æquatur Log-mo quoti, cui ex tabulis respondet numerus 1870. Cum igitur sint proportionalia 100000 ad Z, ita 1 ad 1870; duo extrema ad invicem multiplicata æqualia sunt mediis *per Propos. 16. lib. 6. Eucl.*, idest Z = 187000000. Quod &c.

Schol. *Cum residuum ex divisione superat dimidium divisoris, additur quoto unitas. Sic in priori exemplo pro quoto 5031, sumitur 5032. Nam divisis 3180000 per 632 remanet 408. Quod pro hujusmodi calculis nota. Quæ sequuntur,* Trigonometriæ *doctrinam supponunt.*

PROPOSITIO XIII.

Dati cujuscunque Sinus Log-mum invenire.

UT Log-mi Sinuum accuratiores inveniantur, supponitur Sinus constructos fuisse ad radium saltem 10000000000, & tribus deinde ultimis

timis notis multatos, quales sunt communiter in tabulis Ulacq, & aliorum. Sic Sinus ex. gr. grad. 5 supputatus ad Sinum totum 10000000000 est 8715574270, qui in tabulis multatus reperitur tantum 871557. Cum autem Sinus quilibet considerari debeat tanquam numerus aliquis absolutus, & vulgaris, Log-mi Sinuum quorumcunque habentur *per Propos.* 8. *hujus*. Sed ut facilior, & accuratior quoque sit eorum inventio, necesse erit ad manum habere majorem Log-morum canonem, in quo numeri naturales ad plures, quam fieri potest, notas ascendant.

Log-mi autem Sinuum respicere debent Sinus ipsos prout primo fuerunt inventi, nimirum tribus figuris longiores, quam in tabulis habeantur, respectu scilicet ad sinum totum 10000000000. Sinus itaque ex. gr. grad. 5, qui in tabulis Ulacq est 871557, habet pro suo Log-mo 8.9402960.

Pariter grad. 61. 50 Sinus est 8815782, Logmus vero 9.9452609. Ex Characteristica enim, quæ semper unitate minor esse debet numero figurarum ipsius sinus primo inventi, facile apparet, quot notas habuerit sinus antequam multaretur.

Sit inveniendus Log-mus dati Sinus grad. 23, qui supputatus ad Sinum totum 10000000000 est 3907311284. Inveniatur ex tabulis majoribus Logmorum numerus, qui respondeat quinque notis ad sinistram, cujus Log-mus est 4.5918768. Deinde, ut docuimus in *Prop.* 8., inventa differentia Log-morum numeri 39073, & 39074 proxime sequentis, quæ est 111; dic ut 100000 ad 111, ita notæ residuæ dati Sinus 11284 ad quartum propor-

proportionalem, nempe 12, qui si addatur Logmo jam invento 4.5918768, prodit Log-us quæsitus, hoc est 9.5918780, mutata Characteristica 4 in 9 ob decem figuras dati Sinus, atque ita reperiuntur reliqui Sinus.

Coroll. Logarithmus Sinus totius vulgo ponitur 10.0000000, ex quo si Log-mus aliquis auferatur, residuum dicitur *complementum Arithmeticum*, ut si ex ipso Sinu toto 10.0000000 auferatur Log-mus Sinus grad. 23, nempe 9.5918780, residuum 0.4081220 dicitur complementum Arithmeticum ejusdem Sinus, quo utemur inferius.

PROPOSITIO XIV.

Invenire Log-mum Tangentium, & Secantium dati arcus.

Tangentium, & Secantium Log-mi inveniri possunt eodem modo, quo Log-mi Sinuum, sed compendiosius habentur sic.

1. Sume Log-um Sinus dati arcus, quem adde Log-mo Sinus totius. A summa aufer Log-mum complementi ejusdem Sinus, qui habetur *per Prop. præc.*, residuus erit Log-mus Tangentis quæsitus. Inveniendus sit Log-mus Tangentis grad. 23.

Adde Log. sin. 23. =	9.5918780
Log. sin. tot. =	10. 0000000
Summa	19.5918780
Log. complem.	9.9640261
Tangen. Log.	9.6278519

De-

Demonstr. patet ex *Probl. 6.* Trigonometriæ ; Tacquet, in qua oftenfum fuit, ita fe habere Sinum complementi arcus dati ad Sinum ejufdem arcus, ut Sinus totus ad Tangentem quæfitam : quæ ut inveniatur, adduntur fecundus & tertius terminus, & a fumma fubtrahitur primus *per Prop. 7. hujus.*

2. At vero pro inveniendis Secantibus dati arcus, duplari debet Log-mus Sinus totius, & ex duplo auferri Sinus complementi ejufdem arcus, nam refiduum dabit Log-mum Secantis quæfitæ. Sit exemplum. Quæritur Log-mus Secantis pro dato arcu grad. 23.

Log. fin. tot. =	10.0000000
	2
Ejus duplum =	20.0000000
Log. fin. comp. =	9.9640261
Secan. Log. =	10.0359739

Demonft. ex *Probl. 6. cit.* deducitur. Nam funt tres termini proportionales, Sinus complementi arcus dati grad. 23, Sinus totus, & Secans quæfita, ut ibi oftenditur. Ut ergo habeatur tertius Arithmetice proportionalis, illis refpondens, hoc eft Log-mus Secantis, ex duplo fecundi termini aufertur primus, *per Cor. 1. lemm. 2.*

Coroll. I. Si in Tab. non reperitur exacte Log-mus alicujus Sinus Tangentis, vel Secantis, fignum eft, illum præter minuta prima, continere etiam fecunda, quæ fi quis indagare voluerit, operabitur eo modo, quo docuimus in *Prop.* 10. pro inve-

inveniendis fractionibus. Quod si ea diligentia opus non sit, satis erit sumere gradus cum minutis primis, quæ Log-o proxime minori respondent.

Coroll. II. In Tab. Ulacq. Log-mi Sinuum non habent Characteristicam majorem, quam 9. Proinde si, calculo absoluto, ex Log-morum additione resultet Characteristica major 9, ex. gr. 10, 12, 25 &c. tunc figura prima a sinistris abjicitur, fitque Characteristica, 0, 2, 5 &c.

Coroll. III. Idem fit pro Log-morum Tangentibus, quæ gr. 45 minores sunt. A gradibus vero 45 usque ad 90 Log-orum Tangentes non habent Characteristicam majorem 13. Idcirco si, post additionem factam, Characteristica duabus constet figuris, tunc vel secunda figura excedit 3, & in hoc casu abjicitur prima, sive sit unitas, sive binarius, ut in *A*; vel non excedit, & tunc retinetur unica unitas in figura prima, ut in *B* patet.

A	*B*
Tang. Log. 24.6040812	*Tang. Log.* 21. 2162581
fit 4.6040812	*fit* 11.2162581

Schol. I. *Regula Trium etiam per solam Logmorum additionem potest absolvi, si sumatur prioris termini complementum Arithmeticum*, per Cor. Prop. 13, *&* *ad duos reliquos addatur. Dati sint tres numeri proportionales* 4, 60, 25, *quæritur quartus. Prioris numeri* 4 *complementum Arithmeticum est* 9.3979400, *addatur ad Log-os duorum numerorum* 60 *&* 25, *summa dabit Logmum quæsitum.*

Num.4. Compl.Arithm. 9.3979400
Num. 60 *Log.* 1.7781512
Num. 25 *Log.* 1.3979400

Summa 12.5740312
Fit (per Cor. 2.) 2.5740312, *dat in Tab.* 375

Schol. II. *Si Sinus totus sit primus, vel unus ex terminis regulæ Trium, potest omitti: nam in primo casu est* 0; *& in secundo addit unitatem mox delendam.*

Schol. III. *Log-mi Sinuum vocantur absolute Log-mi, sed Log-mi Tangentium peculiari nomine* Mesologarithmi, *& Log-mi Secantium* Tomologarithmi. *In tabulis inveniri non solent Tomolog-mi, vel quia facile ex Log-mis Sinuum erui possunt, ut vidimus; vel quia sine ipsis calculus bene potest institui. Similiter Sinus complementi alicujus arcus dicitur etiam Sinus secundus, & ab aliis* Cosinus. *Tangens, & Secans complementi dicuntur Tangens, & Secans secunda, vel* Cotangens, *&* Cosecans: *quæ nomina si ignorentur, auctores Trigonometrici difficile intelliguntur.*

Schol. IV. *Log-morum usus patet in omnem fere Mathesin. Nos pauca hic Problemata delibabimus. Plura videri possunt apud Ulacq, Cavalerium, & alios.*

PROBL.

PROBL. I.

Dati numeri quodratum, vel cubum per Log-mos invenire.

1. DAtus ſit numerus v. g. 18, cujus quadratum quæritur. Duplica numeri dati Log-mum, ſumma dabit Log-mum quadrati quæſiti.

Num. 18, *Log.* 1.2552725
1.2552725

Summa 2.5105450, *dat in Tab. quadr.* 324

2. Pro inveniendo ejuſdem numeri 18 cubo, ſume ter, ſeu multiplica per 3 Log-mum ipſius numeri, productum dabit Log-mum cubi quæſiti.

Num. 18, *Log.* 1.2552725
3

3.7658175, *dat in Tab. cubum* 5832

Coroll. Hinc apparet ratio, cur ad extrahendam ex quocunque dato numero radicem quadratam, vel cubicam, accipiatur ex Log-mo numeri dati dimidium pro radice quadrata, aut tertia pars pro radice cubica; cum quadratum ex Log-mo bis ſumpto, cubus vero ex Log-mo ter ſumpto prodeat. Item quarta, quinta &c. pars Log-mi dat Log-mum pro altioribus radicibus inveniendis.

P R O B L. II.

Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios proportionales.

1. INveniendus fit medius proportionalis inter 20, & 320. Adde eorum Log–mos, dimidiæ fummæ Log–mus dat medium proportionalem quæfitum 80.

Num. 20, *Log.* 1.3010300
Num. 320, *Log.* 2.5051500

Summæ Log. 3.8061800
Dimid. Log. 1.9030900, *dat in Tab.* 80.

Eft autem ∺ 20, 80, 320.

2. Inveniendi fint inter duos numeros datos duo, vel tres, vel quatuor, aut plures medii proportionales; regula generalis eft: aufer Logmum numeri minoris ex Log-mo numeri majoris, & hujus refidui tertiam partem, fi duo medii quærantur; vel quartam, fi tres; vel quintam, fi quatuor, adde Log–mo numeri minoris, nam fummæ Log-mus dabit in Tab. medium proportionalem, qui proxime confequitur numerum datum minorem.

4. Ut habeantur medii proportionales reliqui, adde fummæ præcedenti eandem tertiam, vel quartam, vel quintam Log–mi partem, fumma dabit in Tab. reliquos medios proportionales quæfitos, ut exempla, quæ fequuntur, rem fatis illuftrant.

Signa

Signa + & — additionem, & subtractionem indicant. *Q* vero Log-mum quoti addendum.

4. Inveniri oporteat duos medios proportionales inter numeros datos 15 & 120.

Num. 120, *Log.* 2.0791812
Num. 15, *Log.* — 1.1760913

Resid. 0.9030899

Divid. per 3, *dat Q.* 0.3010299
Num. 15, *Log.* + 1.1760913

Summæ Log. 1.4771212 *dat in Tab.* 30
Q. Log. + 0.3010299

Summæ Log. 1.7781511, *dat in Tab.* 60

Sunt ergo ∺ 15, 30, 60, 120, *ut patet.*

5. Quæruntur inter numeros 20, & 1620 tres medii proportionales.

Num. 1620, *Log.* 3.2095150
Num. 20, *Log.* — 1.3010300

Resid. 1.9084850
Divid. per 4, *dat Q.* 0.4771212
Adde num. 20 *Log.* + 1.3010300

Summæ Log. 1.7781512, *dat in Tab.* 60
Q. Log. + 0.4771212

Summæ Log. 2.2552724, *dat in Tab.* 180
Q. Log. + 0.4771212

Summæ Log. 2.7323936, *dat in Tab.* 540

Sunt

Sunt ergo in continua proportione ∺ 20, 60, 180, 540, 1620.

Schol. *Hæc ſane pulcherrima Log-morum praxis ob ſui facilitatem & brevitatem mihi tanti eſſe videtur, ut propter hanc unam, Log-morum doctrinam addiſcendam eſſe putem. Unum aliquem ejus uſum ex innumeris, qui afferri poſſent, indicabimus in ſequenti* Probl. num. 5.

PROBL. III.

Quæſtiones aliquot Arithmeticæ per Log-mos expediuntur.

1. DAntur fœnori ſcuta 500, & ex ſingulis 100 lucrum eſt ſcutorum 5, quæritur quot annis ea ſors duplicabitur.

Ex Log-mo numeri 100 ſubtrahe Log-mum numeri 5, Log-mus reſiduus in Tab. dat annos quæſitos.

Num. 100, *Log.* 2.0000000
Num. 5, *Log.* 0.6989700

Log. reſid. 1.3010300, *dat in Tab.* 20

Quod quidem manifeſtum eſt: nam ſi ſcuta 100 anno 1 dant 5, ſcuta 500 annis 20 dant 500 per regulam proportionum compoſitam ex *Prop.* 2. *Cap.* 6. *Arith.*

Coroll. Si tempus, quo ſors illa duplicatur, ut ſupra inventum dividas, per 2, per 4, vel 5 &c. habe-

habebis tempus, quo sortis ejusdem dimidium, seu quarta, vel quinta pars obtinetur. Sic dividendo annos 20 per 5, quotus 4 dat tempus, quod requiritur ad lucrandam ejusdem sortis quartam partem, hoc est scuta 125, ut patet.

2. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex fœnore auctio sortis. Nihil fuit solutum toto triennio. Quæritur quantum debeat, ut propositum fuit in *Propos.* 13. *Arithm. num.* 5.

Cum hic 100 fiat 110, erit proportio sortis ad sortem una cum fœnore $\frac{110}{100}$, seu $\frac{11}{10}$. Auferatur numeri 10 Log-mus 1.0000000 ex numeri 11 Logmo 1.0413927, residuum, seu Log-mus 0.0413927 erit ratio sortis ad sortem unam cum fœnore unius anni. Sumatur ergo hujus residui Log-mus toties, quot sunt anni (ut hic ter) eique addatur sortis 500 Log-mus 2.6989700; summæ Log-mus 2.8231481 in Tab. quæsitus dabit pro sorte & usura ejus triennii aureos 665 cum dimidio circiter ut in *Propos. cit.* fuit inventum.

Num. $\frac{11}{10}$	*Log.*	1.0413927
	Log.	1.0000000
Resid.	*Log.*	0.0413927
Anni 3		3
	Log.	0.1241781
Sortis 500	*Log.*	2.6989700
Summæ	*Log.*	2.8231481, *dat* $665\frac{1141}{10000}$.

3. Pu-

3. Pupilli alicujus bona, quæ æstimata fuerunt scutorum 1600, accepit Hortensius pacto augendi quotannis sortem ex fructibus ad rationem scutorum 5 in singula centena. Retinuit illa annis 6, mensibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum scuta 100 fiant 105, erit proportio fortis ad sortem una cum fœnore $\frac{105}{100}$, seu (dividendo per 5) $\frac{21}{20}$. Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1.3010300 ex numeratoris 21 Log-mo 1.3222193, residuum 0.0211893 erit ratio sortis ad sortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 sumi debet sexies, seu duci in 6, fitque 0.1271358.

Ut habeantur menses, ac dies, dividatur Log-mus ille residuus 0.0211893 per 12, quotus 0.0017657 dat Log-mum, quinquies sumendum pro 5 mensibus datis, nempe 0.0088285. Hic deinde divisus per 30 $\frac{1}{2}$ dat Log-mum 0.000579, qui sumendus est decies pro diebus 10, fitque 0.0005790. Addatur his Log-mus 3.2041200 pro sorte scutorum 1600, habetur ex horum summa Log-mus 3.3406633, qui in Tab. quæsitus dat numerum, seu scuta 2191 pupillo ipsi ab Hortensio debita.

Pro annis	6	*Log.*	0.1271358
Pro mens.	5	*Log.*	0.0088285
Pro diebus	10	*Log.*	0.0005790
Pro sorte	1600	*Log.*	3.2041200

Summa 3.3406633, *dat* 2191.

4. Fin-

4. Fingamus eundem Hortenſium debere alteri ſummam illam ſcut. 1600 ſolvendam poſt annos 6, menſes 5, dies 10: quam illi parata pecunia offert, ſiquidem ſcuta 5 ex ſingulit 100 a creditore ſibi relaxentur. Quæritur quantum debeat ſolvere.

Hæc quæſtio eadem ratione ſolvitur, dummodo ex Log-mo 3.2041200 ſortis 1600 auferatur ſumma Log-morum pro annis 6, menſibus 5, & diebus 10, ut ſupra inventa, nempe 0.1365433. Nam reſiduus Log-mus 3.0675767 in Tab. quæſitus dat ſummam ſolvendam ſcut. 1168.

Pro annis 6 *Log.* 0.1271358
Pro menſ. 5 *Log.* 0.0088285
Pro diebus 10 *Log.* 0.0005790

Summa 0.1365433

Scut. 1600 *Log.* — 3.2041200

Reſid. 3.0675767, *dat* 1168.

5. Scuta 1000, quæ fœnori data fuerant, reſtituuntur poſt annos ſex una cum annuis uſurarum uſuris, quæ ſimul cum ſorte conficiunt ſummam ſcut. 1340; quæritur ſingulorum annorum uſura cum ipſa ſorte, & quanta fuerit ex ſingulis 100 uſura.

Inveniantur inter duos numeros 1000 & 1340 tot medii proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) *per Probl.* 2. Dabunt illi ſummas quæſitas, hoc eſt ſortem una cum uniuſcunque anni uſura. En totius operationis typus.

Scuta	1340	*Log.*	3.1271048
Scuta	1000	*Log.* —	3.0000000
		Resid.	0.1271048
Divide per 6, dat		*Q.*	0.0211841

Log-mus sextæ partis, quem voco *Q.* addatur primum Log-mo sortis 1000, summa dabit Log-mum pro sorte, & usura primi anni *A*. Adde deinde huic summæ Log-mum ipsum *Q*, nova summa dabit Log-mum pro sorte & usura secundi anni *B*; & sic deinceps addendo præcedenti summæ Log-mum eundem *Q*, aggregatum dat Log-mum pro sorte & lucro annorum *C*, *D*, *E* &c.

	Log.	3.0000000		
Q.	*Log.* +	0.0211841		*A*
	Log.	3.0211841	*dat sc.*	1050
Q.	*Log.* +	0.0211841		*B*
	Log.	3.0423682	*dat sc.*	1102
Q.	*Log.* +	0.0211841		*C*
	Log.	3.0635523	*dat sc.*	1157
Q.	*Log.* +	0.0211841		*D*
	Log.	3.0847364	*dat sc.*	1215

Q. Log.

$\mathcal{Q}$. *Log.* + 0.0211841

E

Log. 3.1059205 *dat sc.* 1276

$\mathcal{Q}$. *Log.* + 0.0211841

F

Log. 3.1271046 *dat sc.* 1340

Inventa autem usura prima anni *A* una cum sorte, scutis scilicet 1050, statim innotescit quanta fuerit ex singulis 100 usura. Nam si 1000 fiunt 1050, scuta 100 per regulam proportionum fiunt 105, adeoque usura fuit scut. 5 ex singulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur *ex Coroll. Prop.* 13. *Cap.* 6. *Arithm.*, & *ex præc. Probl.*

PROBL. IV.

Data tormenti bellici elevatione, distantiam ictus invenire, & e converso.

1. EXperientia constat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli semirecti, seu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo semirecto æqualiter distantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales esse. Sit igitur experimento cognitum ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, explosum fuisse globum ad distantiam passuum 4000; quæritur, quanta futura sit distantia (eadem pyrii pulveris quantitate ac vi servata) ad datam elevationem gr. 30.

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut ſinus totus ad ſinum anguli 30 duplicati, ſeu 60, ita paſſus 4000 ad quartum proportionalem; adeoque per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Gr. 60, *Log.* 9.9375306
Paſſ. 4000, *Log.* 3.6020600

Summa 13.5395906

Fit (*Cor.* 2. *Prop.* 14) 3.5395906, *dat paſſ.* 3464

2. Quod ſi e converſo data ſcopi diſtantia, ex. gr. paſſuum 1500, ad quem ictus eſt dirigendus, quæratur in ipſomet tormento elevationis angulus; fiat ut diſtantia maximi ictus, ex. gr. paſſuum 4000, ad elevationem gr. 45, ita diſtantia data paſſuum 1500 ad angulum elevationis quæſitæ. Itaque duplicato angulo 45, ut in primo caſu factum eſt, erit per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Paſſ. 4000 *Compl. Arithm.* 6.3979400
Paſſ. 1500 *Log.* 3.1760913

Summa 9.5740313, *dat gr.* 22 ½.

Schol. *Quam ſingulari facilitate per Log-mos confici poſſint Tabulæ, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari poſſint, quæque ad utranque hujus problematis partem maxime inſerviant, facile eſt intelligere.*

PROBL.

PROBL V.

Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire.

STatue in plano aliquo horizontali ſtylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipſum planum, qui diviſus intelligatur in partes æquales 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Calendaria innoteſcit) metire umbram, quam projicit ſtylus; ſitque Romæ ex. gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum ſtylus continet 100. Erit per *Probl.* 5. *Tacquet. Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad ſtyli longitudinem 100, ita longitudo ipſius umbræ, prout eſt Sinus totus, ad longitudinem ſtyli, prout eſt Tangens anguli altitudinis Solis, ſeu Æquatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 19', nempe per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Long. 89. *Compl. Arithm.* 8. 0506100
Long. 100 *Log.* 2. 0000000

Tangens 10.0506100, *dat gr.* 48. 19'.

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41. 41, eſt altitudo Poli Urbis Romæ quæſita, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inventa eſt gr. 41. 54', ſeu gr. 42 proxime. Proinde Æquatoris altitudo Romæ eſt gr. 48.

Schol.

Schol. I. *Ceterum plures sunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per stellas, elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam sit maxime necessarium, & Astronomiæ universæ sit veluti basis & fundamentum.*

Schol. II. *Ut habeantur altitudines meridianæ signorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Æquatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Astronomicis passim occurrunt. Sic declinatio Solis in principio signorum Borealium ♉ & ♍ est gr. 11. 30. Hos adde ad Æquatoris altitudinem, quæ* Romæ, *ut diximus, est gr. 48, erit altitudo meridiana Solis ♉ & ♍ initium ingressi gr. 59. 30. Quod si altitudinem meridianam Solis quæras pro initio signorum Australium ♐ & ♒, subtrahe ab Æquatoris altitudine, nempe ex. gr. 48, eorum declinationem, quæ est gr. 20. 12', residuum dat gr. 27. 48' pro altitudine meridiana quæsita.*

PROBL. VI.

In linea meridiana Zodiaci signa describere.

Ducta in aliquo plano horizontali linea meridiana, prout in elementis Sphæricis docetur, quam singulis diebus Sol per foramen exiguum transiens, in ipso meridiei momento tangat, describenda sint in illa Zodiaci signa, nempe ♈, ♉, ♊ &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoscendum tempus, quo Sol ea signa ingreditur, atque percurrit. Meti-

Metire altitudinem gnomonis, seu muri usque ad foramen illud, per quod Sol transit, ut nota fiat in pedibus, vel unciis, aut alia qualibet mensura. Tum inventis altitudinibus meridianis signorum Cœlestium, *per Schol. 2. Probl.* 5, habebis earum complementa, & complementorum ipsorum Mesolog-mos, seu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout est Sinus totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis signi, seu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel unciis nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias, quibus distabit ab initio lineæ meridianæ signi cœlestis locus in ipsamet linea meridiana designandus.

Sit exemplum. Gnomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani jussu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Francisco Blanchino ejusdem Pontificis Prælato domestico constructus anno 1702, in quo quidem altitudo muri usque ad foramen, per quod transit radius Solaris, est unciarum 750 pedis regii Parisiensis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inserta est. Fingamus huic Zodiaci signa ♐ & ♒ (nam bina simul describuntur) esse a nobis inscribenda, seu quærendum esse punctum, quod Sol tangit, ubi signa illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem signorum est gr. 27. 48', *per Schol.* 2. *Probl.* 5., eorumque complementum gr. 62. 12' Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10.2779915. Fiat ergo ut altitudo muri, prout est Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10.2779915, ita eadem muri altitudo, prout est unciarum 750

Log-

Log-mus, ad Log-mum pro unciis quæsitis. Erit *per Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Complem. Tang.	10.2779915
Unc. 750 *Log.*	2.8750613
Summa	13.1530528

Fit (*Cor.* 2. *Prop.* 14.) 3.1530528, *dat unc.* 1422.

Distabunt igitur signa ♐ & ♒ a principio lineæ meridianæ unciis 1422 pedis ejusdem Parisiensis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci signorum in ipsa linea meridiana locus designabitur.

APPENDIX

Praxeon Chronologicarum.

CUM tempus ex Aristotele lib. 4. Physic. Cap. 11. sit numerus, seu mensura motus secundum prius & posterius, non erit abs re hic praxes aliquot Cronologicas subjicere, quæ a numeratione temporis, seu motuum Cœlestium Solis, & Lunæ maxime pendent, quas quidem non tam præclarum est scire, præsertim Ecclesiasticis viris, quam turpe nescire, id quod de Latina lingua inquit Cicero. Prænotandi igitur sunt primo termini aliquot Chronologici.

DEFI-

DEFINITIONES.

1. CYclus, seu *Periodus* est certus annorum numerus in orbem rediens. Tres præsertim sunt Cycli Solaris, Lunaris, Indictionis.

2. *Cyclus Solaris* est intervallum annorum 28; quo evoluto, literæ Dominicales *A.B.C.D.E.F.G.* Calendario appositæ redeunt eodem ordine, quo antea, & ad easdem ferias.

3. *Cyclus Lunaris*, sive *aureus Numerus* est series annorum 19, qua completa, novilunia ad eundem diem regrediuntur. Dicitur *Numerus aureus*, quia Athenis in foro aureis literis quotannis inscribebatur ad novilunia indicanda.

4. *Indictio* est series annorum 15 in orbem rediens, post Constantini tempora, sive ab anno Christi 312, ut fama est, in usum recepta apud Græcos & Romanos; hoc discrimine, quod indictio Romana a Kal. Januariis, Græca vero a Kal. Septem. initium ducit.

5. *Annus Julianus* a Julio Cæsare Dictatore dictus, qui Numæ regis annum emendavit, est dierum 365 hor. *6*, quæ quidem horæ *6* singulis quatuor annis horas 24, seu diem solidum constituunt. Itaque annus Julianus, qui constat diebus 365, dicitur *communis*; qui vero diebus 366 singulis quadrienniis, *Bissextilis* dicitur, quod scilicet dies sextus ante Kal. Martias bis numeretur, seu intercaletur, unde dies, & annus *intercalares* vocantur.

6. *Annus Gregorianus* est annus Julianus a Gregorio XIII. Pontifice anno 1582. correctus,

10 diebus subductis. Differt a Juliano in hoc, quod post annum Christi 1600. e singulis annis centesimis, qui omnes in Calendario Juliano bissextiles sunt, in Gregoriano tres primi, nempe 1700, 1800, & 1900 sunt communes, & solus quartus 2000 bissextilis erit.

7. *Epactæ* sunt dies undecim, qui addendi sunt ad annum lunarem, (qui constat diebus 354) ut adæquet annum solarem; qui est dierum 365, ut dictum est. Unde si hoc anno ex. gr. fuerit Epacta XI., sequenti anno erit XXII, sed tertio anno Epacta erit III. Nam quoties Epactæ hujusmodi additæ excedunt numerum 30, detrahitur numerus 30, & residuus numerus est Epacta illius anni. Si per additionem fiant 30, Epacta illius anni erit *, seu nihil.

8. *Periodus Victoriana*, seu *Dionysiana* est series annorum 532 e Cyclo Solari 28, in Cyclum Lunarem 19 multiplicato contexta, qua peracta, iidem Cycli Solis & Lunæ iterum redeunt. Dicitur *Victoriana*, quod a Victore Aquitano anno Christi 457 instituta sit, vel *Dionysiana* a Dionysio quodam *Exiguo*, qui ad Ecclesiam Romanam cum Alexandrina circa celebrationem Paschatis conciliandam, illam adhibuit.

9. *Periodus Juliana* est series annorum 7980, quæ ex Cyclorum Solis, Lunæ, & Indictionis multiplicatione oritur; sive est productum ex multiplicatione Periodi Victorianæ per Cyclum Indictionis, nempe annorum $532 \times 15 = 7980$; in qua tres illi Cycli Solis, Lunæ, & Indictionis, qui in præsenti hoc anno conveniunt, in alio iterum non

non convenient nisi post annos 7980 expletos. Dicitur Juliana, quod Julianis annis constet. Est Periodus omnium præstantissima, quæ incœpit anno 710 ante Orbem conditum, & nondum est absoluta, a Josepho Scaligero excogitata.

10. *Epocha*, sive *Æra* est terminus, a quo anni numerantur. Sic Æra Christiana, qua nunc vulgo utimur, & vulgaris dicitur, numerat annos a Christi nativitate, seu potius ab ejus Circumcisione, hoc est a Kal. Januariis post orbem conditum annis 4004 juxta Cl. Usserii calculum.

Scol. I. *Loquimur hic de anno tam Solari, quam Lunari civili, qui ex integris diebus constant, non autem de anno Solari, aut Lunari Astronomico, qui præter dies, horas quoque & minuta prima, secunda, tertia &c. computat, quæ non sunt hujus loci.*

Schol. II. *Literæ Dominicales ordine retrogrado procedunt, nempe* G, F, E, D, C, B, A, *ut si hoc anno litera dominicalis sit* G, *proximo anno erit* F, *tertio* E *&c. usque ad* A, *quam* G *iterum sequitur. Ratio est, quia cum annus Julianus communis constet diebus* 365, *hoc est hebdomadibus* 52, *& præterea die* 1, *si prima Januarii dies designetur litera* A, *etiam ultima Decembris eadem litera* A *designabitur. Sic igitur tam primus, quam ultimus illius anni dies Dominicus, subsequens annus inchoabitur feria* II, *dies autem Dominicus hujus anni incidet in diem Januarii septimum; proinde litera Dominicalis non erit* B, *sed* G. *Tertius anni inchoabitur feria* III, *adeoque dies Dominicus cadet in diem 6 Januarii, & litera Dominicalis erit* F,

 & sic

& sic de ceteris. Bissextilis autem annus duplici litera designatur eodemque ordine retrogrado, scilicet GF, FE, ED *&c. ita ut non* F, *sed* G *priorem locum obtineat, & ad diem usque 23 Februarii usurpetur, altera vero* F *deinceps usque ad finem totius anni intercalaris.*

PRAXIS I.

An datus annus sit Bissextilis, vel quotus sit a Bissextili, invenire.

ANnum Christi datum divide per 4; si facta divisione, nihil remanet, ille annus Bissextilis est; si quis sit residuus, indicat, quotus annus sit a Bissextilis. Sic annus, in quo hæc scribimus, 1748, quia divisus per 4, nihil remanet est Bissextilis. Annus vero proximi Jubilæi 1750 erit secundus a Bissextili. Nam eo diviso per 4 remanent 2.

Coroll. Divisionis hujus quotus, residuo neglecto, indicat, quot effluxerint anni a Christo nato Bissextiles. Sic anno 1748 numerantur Bissextiles 437. Sed unitate mulctari debent propter annum 1700, qui Bissextilis non fuit ex dictis *Defin. 6.* Erunt ergo numerandi $437 - 1 = 436$.

PRA-

PRAXIS II.

Cyclum Solarem anni dati invenire.

ANno Cristi proposito adde 9 (decimo namque hujus Cycli anno Christus natus est, adeoque jam novem erant expleti) Tum summa illa dividatur per 28, numerus ex divisione residuus erit Cyclus Solaris anni dati. Si ex divisione nihil remanet, erit Cyclus Solaris completus 28. Quotus autem indicat revolutiones hujus Cycli a Christi nativitate peractas. Esto hic annus 1748, cui adde 9, fit 1757, quem divide per 28 remanent 21 pro Cyclo Solari currentis anni. Quotus autem 62 indicat totidem effluxisse a Christo nato Cyclos Solares.

PRAXIS III.

Aureum numerum dati anni invenire.

DAto Christi anno adde unitatem (nam primo Æræ Christianæ anno aureus numerus fuit 2, adeoque unus jam erat absolutus) summam deinde divide per 19, residuum erit numerus aureus. Si nihil remanet, erit Cyclus completus, sive annus 19. Quotus vero indicat, quot Cycli Lunares hactenus ab Æra Christiana fuerint. Quæritur numerus aureus currentis anni 1748. Adde 1, fit 1749, quem divide per 19, remanet 1 pro aureo numero quæsito. Sunt autem a Christo nato

to Cycli Lunares 92, ut divisionis quotus ostendit.

PRAXIS IV.

In quam hebdomadæ feriam incidat primus anni dati dies, invenire.

AD annum Christi præcedentem addatur Bissextiles elapsi, & a summa subtrahantur 10. Tum numerus residuus dividatur per 7, id quod restat ex divisione dat feriam quæsitam. Si nihil remanet, erit feria septima, seu Sabbatum. Scire cupio ex. gr. in quam feriam cadet primus dies anni 1800. En calculi typus

Annus præced.	1799
Bissext. per Cor.	448
	2247
Correc. Greg.	— 10
7	2237

$319\frac{4}{7}$ *resid.* 4. *indicat Fer.* IV.

Eadem ratione invenitur feria, in quam dato anno, incidit propositus cujuscunque mensis dies. Quæritur ex. gr. in quam feriam inciderit dies 17 Augusti anno 1740, in quo electus fuit Pontifex Maximus Benedictus XIV. Ad annum præcedentem addantur tum Bissextiles, qui *per Coroll. Prax.* I. sunt 433, tum dies elapsi a Kal. Januariis usque ad diem 16 Augusti 1740, nempe

229

229, fit summa 2401, ex qua ob correctionem Gregorianam subductis 10, & residuo diviso per 7, remanent 4. Fuit ergo Feria IV.

Ann. præced.	1 7 3 9
Bissextiles	4 3 3
Dies elapsi	2 2 9
	2 4 0 1
Corr. Gregor.	— 1 0
7	2 3 9 1

341 $\frac{4}{7}$ *Ref.* 4. *indicat Fer.* IV.

PRAXIS V.

Literam Dominicalem dati anni invenire.

INveniatur Feria, qua annus propositus inchoatur *per prax. præc.*, eamque subtrahe ex 9, residuum dabit literam Dominicalem. Quæritur litera Dominicalis pro anno proximi Jubilæi 1750. Primus ejus dies *per Prax. præc.* incidet in Feriam V., subtrahe 5 ex 9, residuum 4 dat literam Dominicalem quarto loco positam, ordine literarum directo numerandam, nempe *D.* Similiter scire volo literam Dominicalem anni 1755. Feria, in quam incidet primus ejus anni dies, erit per *Prax. præc.* Feria IV. Hanc subtrahe ex 9; residuum 5 dat literam Dominicalem *E* quinto loco positam.

Schol. *Aliæ sunt praxes pro litera Dominica-*
li

li invenienda, sed hæc a Blondello allata, est omnium brevissima, atque pulcherrima.

PRAXIS VI.

Dati anni Epactam invenire.

INveniatur aureus numerus anni propositi pe, *Prax.* 3., qui multiplicetur per 11, & ex pro-r ducto auferantur dies 11 pro correctione Gregoriana, residuoque diviso per 30, numerus, qui remanet, erit Epacta quæsita. Ex. gr. quæritur Epacta anni 1750, cujus numerus aureus per *Prax.* 3. est 3. Hunc duc in 11 fit 33, ablatisque 11, residuum est 22, quod cum dividi nequeat per 30, residuum ipsum 22 dat Epactam quæsitam. Anni autem currentis 1748 Epacta est * seu zero. Nam aureus numerus est 1, adeoque ex hac praxi $1 \times 11 = 11 - 11 = 0$.

Schol. *Epactæ dati anni numerari incipiunt a Kal. Martiis ejusdem anni. Proinde Epacta hujus* 1748 = 0 *durabit toto Februario anni* 1749.

PRAXIS VII.

Mense ac die datis, ætatem Lunæ invenire.

ADde simul Epactam currentis anni, dies mensis elapsos, & numerum mensium a Martio inclusive, & ex summa subtracto, si fieri possit 30, residuum dabit ætatem Lunæ. Scire volo ex. gr.

gr. ætatem Lunæ die 15 mensis Decembris hujus anni 1748. Cum ex dictis *in Prax. præc.* Epacta hoc anno sit = 0, addantur tantum dies 15, & numerus mensium a Martio inclusive, nempe 10, summa 25 (ex qua 30 subtrahi nequeunt) dat Lunæ ætatem quæsitam. Similiter scire cupio ætatem Lunæ die 4 Junii anni 1750. Epacta ejus anni per *Prax. 6.* est 22, cui adde dies 4 mensis Junii, & insuper 4 pro numero mensium a Martio inclusive, fit summa 30, ex qua si subtrahantur 30, nihil remanet; est ergo illo die Novilunium.

PRAXIS VIII.

Datis mense & anni Epacta Novilunii diem invenire.

ADdatur ad Epactam anni dati numerus mensium a Martio inclusive, & summa subtrahatur ex 30; vel si summa illa superat 30, subtrahatur ex 60, residuum indicabit diem Novilunii. Quæritur ex. gr. in quotam Martii diem incidet Novilunium anno 1749. Ad Epactam ejus anni, quæ est 11 per *Prax. 6.* adde numerum mensium, qui est 1, & summa 12 subtrahatur ex 30, residuum 18 indicat Martii Novilunium die 18 futurum. Similiter quæritur Novilunium Decembris 1750. Ejus anni Epacta est 22 per *Prax. 6.*, & numerus mensium a Martio inclusive 10. Horum summam 32 subtrahe ex 60, residuum 28 dat diem Novilunii.

Schol. I. *Quanquam autem ætas Lunæ per Epactas præcise definiri non possit, nunquam tamen solido die a vera Lunæ ætate aberrat; proinde hæc methodus satis tuto in vulgarem usum recepta est.*

Schol. II. *Novilunium Paschale continetur intra diem 8 Martii & 5 Aprilis inclusive, intra quos terminos, qui Paschales audiunt, reperiri debet.*

PRAXIS IX.

Dato Æræ Christianæ anno Indictionem invenire.

ANno Christi proposito adde 3, (primus enim Æræ Christianæ annus cœpit indictione quarta) & aggregatum divide per 15, residuum ex divisione dat annum Indictionis. Si nihil remanet, erit Indictio 15. Sic ad hunc annum 1748 additis 3, fit summa 1751, quæ divisa per 15, dat residuum 11 pro Indictione quæsita. Quotus autem 116 indicat Indictiones jam a Christo nato completas.

PRAXIS X.

Dato Æræ Christianæ anno, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.

ESto datus Christi annus præsens 1748, quæritur annus Periodi Julianæ, qui illi respondet.

det: Anno dato 1748 adde 4713, summa 6461 dat annum quæsitum. Ratio est, quia primo Christi anno elapsi jam erant ejus periodi anni 4713.

Coroll. Si datus quilibet Periodi Julianæ annus dividatur per 28, per 19, & per 15, residuum ex prima divisione erit Cyclus Solis, ex secunda Cyclus Lunæ, & ex tertia Cyclus Indictionis. Sic diviso anno currenti Periodi Julianæ 6461 per 28, remanent 21 pro Cyclo Solari; per 19, remanet 1 pro Cyclo Lunari, sive aureo numero; per 15, remanent 11 pro Cyclo Indictionis.

PRAXIS XI.

Dato anno ante Christi æram, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.

ESto datus annus ante Christum natum 4004, cui Usserius, Pagius, Lancellottus, aliique Chronologi illustres Mundi initium tribuunt, quæritur, quotus ille fuerit in Periodo Juliana. Auferatur datus annus 4004 ab annis Periodi Julianæ 4714, in quibus ex dictis *in Prax. præc.* primus Christi annus contigit, residuum dabit annum Periodi Julianæ, qui primo Mundi anno respondet, nimirum 710. Res per se patet.

Coroll. Hinc est, quod dato quolibet Periodi Julianæ anno, facile innotescit, an ille sit ante, vel post Christi nativitatem. Nam si datus annus major sit anno 4714, erit annus Periodi Julianæ post

Christum; si minor, erit ante Christum natum: Sic datis Periodi Julianæ annis 6461, ablatisque ab illis Periodi Julianæ annis 4713, ramanet præsens æræ vulgaris annus 1748. Ablatis autem annis Periodi Julianæ 710 ab annis 4714, habentur anni 4004 ante Christi nativitatem.

PRAXIS XII.

Datis Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis, invenire annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.

Duc Cyclos datos { *Solis* × 4845, *Lunæ* × 4200, *Indict.* × 6916 }

Et summa productorum divide per 7980, residuus erit annus Periodi Julianæ, qui datis Cyclis respondet. Sit exemplum. Primus Christi annus habuit Cyclum Solis 10, Lunæ 2, & Indictionis 4, quæritur annus Periodi Julianæ, cui conveniunt.

Cycli	*Solis*	10 × 4845 =	48450
	Lunæ	2 × 4200 =	8400
	Indic.	4 × 6916 =	27664
		Summa	84514

Quæ divisa per 7980, residuum 4714 dat annum Periodi Julianæ pro primo Christi anno.

Simi-

Similiter hoc anno 1748 Cyclus Solis est 21, Lunæ 1, Indictionis 11, quæritur annus Periodi Julianæ.

$$Duc \begin{cases} 21 \times 4845 = 191745 \\ 1 \times 4200 = 4200 \\ 11 \times 6916 = 76076 \end{cases}$$

$$Summa = 182021$$

Quæ divisa per 7980, residuum 6461 dat annum Periodi Julianæ, qui *ex Prax.* 10. respondet huic anno 1748.

Schol. *Qua ratione numeri illi determinati* 4845, 4200, *&* 6916, *per quos dati Cycli multiplicari debent, inveniantur, non est hujus loci inquirere, cum methodo Analytica opus sit, quemadmodum ea usi sunt Franciscus a Schooten in Miscell., Præstetus T. 2. lib. 7. Element. Mathem., Joannes Keill lect. 29. de Cyclis, & alii.*

PRAXIS XIII.

Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.

Olympiadum Epocha apud historicos, præsertim vero Græcos, celeberrima semper fuit, cum Græci annos nonnisi per Olympiades, unde anni Olympiaci dicti sunt, numerare solerent. Nam quadriennio quolibet vertente, seu quinto quovis redeunte anno, in Olympia Elidis Urbe ludos

ludos in honorem Herculis circa solstitium æstivum maximo populorum concursu celebrabant. Ludi autem hujusmodi ab Iphito Elidis rege sive primum instituti, sive instaurati sunt anno Per. Jul. 3938, & ante Christianam æram anno 776.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur annus Olympiacus, qui illi respondet. Si datus annus minor sit annis 3938, ex his auferatur; qui remanet, dabit annos, qui Olympiadum Epocham præcedunt. Sit annus Per. Jul. 3103, in quo juxta Petavium Moyses natus est, quæritur quot annis ejus nativitas Olympiadum præcesserit institutionem. Subductis 3103 ex 3938, residuum 835 dat annos quæsitos.

Quod si datus sit Per. Jul. annus 4714, in quo incœpit Christiana æra, ut sæpe dictum est, major scilicet annis 3938, hos ab illo subducito, residuum 776 dabit annos Olympiacos: qui si dividantur per 4, quotus dat Olympiades completas 194, & annum 1 Olympiadis ineuntis 195. Christus ergo natus est anno 1 ab Olympiade 194, sive anno primo Olympiadis 195.

Coroll. Dato æræ Christianæ anno, ex. gr. 1748, si illi addas annos 776, habebis annos Olympiacos, qui huic anno respondent, 2524; quibus divisis per 4, habentur Olympiades 631. Simili ratione annus proximi Jubilæi 1750 erit secundus Olympiadis 632.

PRA-

PRAXIS XIV

Dato anno Olympiaco, quotus ille in Periodo Juliana sit, invenire.

DAta sit Olympias 114: qua ineunte, Alexander M., ut historici referunt, diem obiit, quæritur quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Multiplica Olympiades 113 elapsas per 4, & producto 452 adde unitatem, ob annum primum Olympiadis 114 ineuntis, fit 453, cui adjice 3937, aggregatum 4390 est annus Periodi Julianæ, in quo Alexander M. interiit.

Similiter Diodorus Siculus scribit, annum primum Olymp. 94 exeuntem, esse annum 780 post Trojæ excidium; scire volo, quotus ille esset Per. Jul. annus. Cum Trojanum excidium ex ejusdem Diodori Siculi, & Dionysii Halicarnassensis sententia acciderit anno Per. Jul. 3530, addantur anni post Trojæ casum elapsi 780 ad annos ipsos 3530, summa 4310 dabit annum Per. Jul., qui congruit cum anno 1 Olymp. 94.

Coroll. I. Nota igitur, Trojæ excidium contigisse anno Per. Jul. 3530, ita ut primus annus Epochæ Trojanæ fuerit Per. Jul. annus 3531.

Coroll. II. Si ex anno Per. Jul. 4714, æræ Christianæ primo, auferas 4390, residuum 324 dat annos, quibus Alexandri M. mors præcessit Christi nativitatem. Sin ab eo auferas 3531, habebis annos Trojani excidii 1183 ante Christum natum. Quæ omnia ex *Coroll. Prax.* 11. plana sunt.

PRA-

RAXIS XV.

Dato anno Periodi Julianæ, annum U. C. ei congruentem invenire.

EX historia Romana satis patet, Romanos ab Urbe condita annorum initium eorumque seriem numerare consuevisse: unde orta est celebratissima U. C. Epocha. Quæ quidem duplex est, *Varroniana* a M. Varrone dicta, quæ ædificationem Urbis in annum tertium Olympiadis VI. exeuntem refert, cui respondet annus Per. Jul. 3960, seu 3961 (cum Kal. Januariis sequentibus ea cœperit); Christianam vero Epocham antecedit annis 753, ita ut in annum U. C. 754 cadat primus Christi annus; & *Capitolina*, quæ a fastis Capitolinis collectis deducta fuit, & Urbem conditam in sequentem annum Per. Jul. 3962 rejicit. Sed Cor. Tacitus in suis Annalibus, Censorinus de Die Natali, aliique viri docti, quorum sententiam sequimur, Epocham U. C. Varronianam Capitolinæ præferunt.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur quotus illi in Epocha U. C. annus congruat. Si propositus annus minor erit 3961, facta subtractione, residuum dabit annos ante Urbem conditam. Sic ab anno 3961 subductis 710 (cui Per. Jul. anno Usserius initium Mundi tribuit, ut dictum est) residuum 3251 dat Mundi annos ante U.C. Quod si major sit annis 3961, facta subtractione, residuum

ſiduum dabit annos ab U. C. Sic ſubductis 3961 ex 4714 (primo æræ Chriſtianæ anno) reſiduum 753 dat annos U. C., qui præcedunt Chriſti nativitatem, quæ ex ſuperius dictis incidit in annum U. C. 754.

PRAXIS XVI.

Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympiadum, & æræ Chriſtianæ annos ei congruentes invenire.

REfert C. Plinius Nat. hiſtor. lib. 8. c. 6. elephantos in Italia primum viſos Pyrrhi regis bello, anno Urbis quadringenteſimo ſeptuageſimo ſecundo; hinc

1. Quæritur, quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Ad U. C. annos ante dictos 472 addantur anni 3960, qui U. C. Epocham præceſſerunt ex dictis *in Prax. præc.*, aggregatum 4432 dat annum Per Jul. quæſitum, ut patet.

2. Quæritur, in qua Olympiade, ſeu quoto anno Olympiaco illud acciderit. Ab anno Per. Jul. 4432, ut ſupra, invento, auferantur anni 3938, a quibus Olympiadum Epocha incœpit, reſiduum 494 dat annos Olympiacos, quibus diviſis per 4, habetur annus ſecundus Olympiadis 124 *per Prax.* 13.

3. Demum quæritur, in quotum annum ante, vel poſt Chriſtum natum Pyrrhi bellum, ſeu elephantorum in Italiam adventus inciderit. Ex an-

no Per. Jul. 4432 ſuperius invento, facile intelligitur *per Coroll. Prax.* 11. id ante æram Chriſtianam contigiſſe. Itaque idem Per. Jul. annus 4432 auferatur ab anno primo Chriſtianæ æræ 4714, reſiduus 282 dabit annos, qui Chriſtianam æram præceſſerunt. Proinde elephantos Italia primum vidit anno Per. Jul. 4432, anno ſecundo ab Olympiade 123, poſt U. C. 472, ante æram Chriſtianam annis 282.

Coroll. Dato U. C. anno, ſive anno Per. Jul. qui ei congruit, facile intelligitur, quotus ille ſit a Trojæ excidio annus. Subductis enim Trojanæ Epochæ annis Per. Jul. 3530 (*per Cor.* 1. *Prax.* 14.) ab annis Per. Jul., qui in eadem Per. Jul. reſpondent U. C. annis, reſiduus erit annus quæſitus. Sit exemplum. Dato anno U. C. 537, in quo a Romanis clades maxima ad Traſimenum lacum accepta eſt, Flaminii conſulis temeritate; quæritur, quotus ille fuerit ab excidio Trojæ, ſeu Trojanæ Epochæ annus. Inveniatur annus Per. Jul. congruens U. C. anno 537, qui *per partem* 1. *hujus Prax.* erit 4497; ex hoc ſubducito Trojanæ Epochæ annos 3530 (*per Coroll.* 1. *Prax.* 14.) reſiduum dat annos, qui intercesserunt, *967*.

PRA-

PRAXIS XVII.

Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, seu neomeniam Thoth, invenire.

DE æra Nabonassari crebra fit mentio tum apud veteres Astronomos Ptolemæum, Hipparchum & alios, tum etiam apud celebriores Chronologos: proinde a nobis ea hic omitti omnino non potest. Fuit Nabonassarus Chaldæorum Rex, a cujus regni initio Babylonii novam Epocham instituerunt, quam Ægyptii ab illis acceperunt. Exordium ejus cadit in Per. Jul. annum 3967, die 26 Febr. ante Christum natum 749.

Quia vero Nabonassari æra non annis Julianis, sed Ægyptiacis constat, de his primo eorumque initio agendum est. Annus Ægyptiacus dies 365 continet, neglectis 6 illis horis, quibus annus Julianus, præter dies 365, componitur. Unde fit ut, propter omissam quadriennio quolibet vertente diem intercalarem, initium anni Ægyptiaci (quod neomenia Thoth dicitur) retro abeat, & per totum annum Julianum vagetur, unum perpetuo anticipans diem; ut si hoc anno ex. gr. neomenia Thoth incipiat Calendis Januariis, post quatuor annos incipiet die 31 Decembris, & iterum post alios quatuor annos, die 30 Decembris, & sic deinceps; donec demum anno 1461 ad Calendas Jan. rursus redeat, expletis scilicet annis Julianis 1460, qui annos Ægyptiacos 1461 præcise continent.

In tota autem Periodo Juliana sunt quinque anni, qui spatio annorum 1460 invicem distant, in quibus tam primo Januarii die, quam ultimo Decembris neomenia Thoth contingit, nempe

1273, 2733, 4193, 5653, 7113

Dato igitur Per. Jul. anno, inveniri debeat, quoto die initium anni Ægyptiaci, seu Thoth incipiat. Hæc erit regula. Subducatur annus Per. Jul. ex uno ex superioribus numeris, qui sit proxime major dato, & residuum dividatur per 4. Si quotus minor fuerit quam 59, vel aliquid post divisionem supererit, addatur quoto unitas, dabit summa diem neomeniæ Thoth a Calendis Januariis in anno Juliano numerandum. Si a divisione nihil restat, & quotus est major 59, ipse dabit diem, in quem incidet neomenia Thoth. Sit exemplum. Esto datus annus Per. Jul. 4714, in quo Christi dies natalis illuxit, quæritur, in quoto illius anni die neomenia Thoth contigerit. Subductis annis 4714 a numero proxime majori 5653, remanent 939, quibus divisis per 4, quotus dat 234, & remanent 3. Adde 1 ad ipsum quotum. Cœpit igitur Thoth die 235 a Calendis Januariis numerandum, hoc est die 23 Augusti. Similiter scire volo in quotum anni 1748 diem incidat initium anni Ægyptiaci, seu Thoth. Annus Per. Jul., qui huic anno congruit, est 6461 *per Prax.* 11. hunc subtrahe ex 7113 proxime majori, & residuum 652 divide per 4, quotus dat 162 sine ullo residuo. Huic (ob Correct. Gregorianam) adde 11, fit aggregatum 174.

Hoc-

Hoc igitur anno 1748 initium anni Ægyptiaci contigit die 23 Junii, diebus scilicet 174 a Cal. Januariis.

Demum datus sit Periodi Julianæ annus 3965, in quo Tobias senior natus esse dicitur, & quæratur ejus anni neomenia Thoth. Subducto 3965 ex 4193, remanent 228, quem numerum si dividas per 4, habebis 57, & nihil remanet. Quia vero hic numerus minor est quam 59, nempe quam dies ultimus Februarii, in quo additur bissextilis dies, ad 57 addenda est unitas, & habetur dies quinquagesimus octavus, in quem cadet neomenia Thoth, nempe dies 27 Februarii.

Schol. *Ex secundo exemplo patet, post Christi annum* 1582, *ad neomeniæ Thoth diem in anno Juliano inventum addendos esse, ob Correct. Gregorianam, dies* 10 *usque ad annum* 1700, *&* *ab anno* 1700 *usque ad* 1800 *dies* 11.

PRAXIS XVIII.

Dato quolibet Per. Jul. anno, quotus ille in æra Nabonassari sit, invenire.

OBserventur quinque sequentes anni Per Jul. *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; quorum primus initium dedit Epochæ Nabonassari, reliqui vero annos Nabonassareos singuli inchoant, ut in *Prax. præc.* explicavimus, eodemque intervallo annorum 1460 invicem distant

A	*B*	*C*	*D*	*E*
	1.	2.	3.	4.
3967.	4193.	5653.	7113.	8573.

Dato igitur quovis Per. Jul. anno, videatur ad quodnam intervallum ſpectet, ſive quonam numerorum *A*, *B*, *C*, &c. ſit proxime minor. Tum additis unitatibus, quæ illi intervallo reſpondent, dematur ex aggregato primus terminus *A*, id quod remanet indicabit quotus ſit annus in æra Nabonaſſari quæſitus. Eſto annus Per. Jul. 4714, qui, ut ſæpe diximus, fuit humanæ ſalutis exordium. Hic ad intervallum ſecundum pertinet, cum ſit major *B*, minor *C*; adde igitur 2 ad 4714, & ex ſumma 4716 deme numerum 3967, reſiduum dat 749. Ergo Chriſtus natus eſt Nabonaſſari anno 749.

Eadem ratione ſcire cupio, quotus Nabonaſſari annus ſit ipſe, qui labitur annus 1748. Cum hic *ex Prax.* 11. ſit annus Per. Jul. 6461, major autem ſit termino *C*, minor vero *D*, ſpectat ad intervallum 3. Adde ergo illi tres unitates, & ex ſumma 6464 tolle terminum *A*, reſiduus numerus 2497 dat annum Nabonaſſareum, qui cum hoc anno æræ Chriſtianæ 1748 congruit.

Ratio regulæ patet ex dictis. Nam quodlibet intervallum eſt annorum 1460. Anni autem Juliani 1460 continet annos Ægyptiacos 1461, & unumquodque intervallum annum unum auget; proinde Per. Jul. anni, qui ex annis Julianis conſtant, angeri debent tot unitatibus, quot ſunt intervalla, ut inter ipſos & annos Ægyptiacos, ſeu Nabonaſſareos habeatur æquatio.

PRA-

PRAXIS XIX.

Nabonassari annos in Per. Jul. annos convertere.

NOtentur sequentes numeri *A*, *B*, *C*, *D*, *E* eorumque intervalla 1, 2, 3, 4, & videatur ad quod ex illis pertineat Nabonassari annus propositus, ab eoque tot demantur unitates, quot illi intervallo conveniunt. Tum residuo addantur anni 3967, qui initio æræ Nabonassari tribuuntur, summa erit annus Per. Jul. quæsitus.

A.		*B.*		*C.*		*D.*		*E.*
	1		2		3		4	
1.		227.		1688.		3149.		4610.

Sit exemplum. Ptolemæus lib. 5. pag. 125. refert, Lunam defecisse anno quinto Nabopollassari, qui est 127 a Nabonassaro; quæritur, quoto Per. Jul. anno id acciderit. Cum annorum numerus 127 ad intervallum 1 spectet, utpote major *A*, minor vero *B*, auferatur ab eo 1, & residuo 126 addatur 3967, summa 4093 est annus Per. Jul. quæsitus.

Similiter quæritur, quotus sit in Periodo Juliana annus Nabonassari 2497. Patet hunc numerum pertinere ad intervallum 3, cum sit proxime major *C*, minor vero *D*. Auferantur igitur ab eo tres unitates, & residuo 2494 addatur numerus 3967; summa 6461 est annus Per. Jul., qui congruit

11—1.



